

**TU Braunschweig - Niedersächsisches  
Forschungszentrum für Luftfahrt**

**Berichte aus der Luft- und Raumfahrttechnik**

**Forschungsbericht 2018-16**

**Zeitspektrale Lösungsstrategien zur  
Berechnung inkompressibler, viskoser  
Strömungen**

**Sabine Baumbach**

**TU Braunschweig  
Institut für Strömungsmechanik**

---

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als von der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktor-Ingenieurin genehmigte Dissertation.

**Die Deutsche Bibliothek - CIP Einheitsaufnahme**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar.

**Sabine Baumbach**

Zeitspektrale Lösungsstrategien zur Berechnung inkompressibler, viskoser Strömungen  
©2018

ISBN 978-3-947623-11-2

als Manuskript gedruckt

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als von der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktor-Ingenieurin genehmigte Dissertation.

**Herausgeber der NFL Forschungsberichte:**

TU Braunschweig - Niedersächsisches  
Forschungszentrum für Luftfahrt  
Hermann-Blenk-Straße 27 • 38108 Braunschweig  
Tel: 0531-391-9822 • Fax: 0531-391-9804  
Mail: [nfl@tu-braunschweig.de](mailto:nfl@tu-braunschweig.de)  
Internet: [www.tu-braunschweig.de/nfl](http://www.tu-braunschweig.de/nfl)

Copyright Titelbild: Sabine Baumbach

# **Zeitspektrale Lösungsstrategien zur Berechnung inkompressibler, viskoser Strömungen**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu  
Braunschweig

zur Erlangung der Würde

einer Doktor-Ingenieurin (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Sabine Baumbach

aus: Eisleben

eingereicht am: 05.03.2018

mündliche Prüfung am: 01.11.2018

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Rolf Radespiel  
Prof. Dr. Norbert Kroll

2018



# Kurzfassung

Die numerische Strömungsmechanik (CFD) ist ein fester Bestandteil im Produktentwicklungsprozess. Sie wird unter anderem für die Auslegung und Optimierung von Wasserpumpen genutzt. Gängig ist die Berechnung dieser Bauteile mittels stationärer Verfahren. Hier wird nach der rotierenden Strömung im Relativsystem gelöst. Das Ziel der Berechnung ist dabei nicht nur optimale hydraulische Kennwerte zu erreichen, sondern auch den Komfort des Kunden zu verbessern durch Reduzierung des Lärmpegels der Bauteile. Druckfluktuationen innerhalb der Pumpe sind dabei eine entscheidende Schallquelle. Die Druckfluktuationen können mittels instationärer Rechnungen ermittelt werden. Zeitlich aufgelöste Rechnungen mit herkömmlichen Zeitschrittverfahren benötigen jedoch viel Rechen- und Speicherressourcen. Es wird daher nach Alternativen zu Zeitschrittverfahren gesucht.

Der zeitlich periodische Charakter von Wasserpumpen erlaubt eine Modellreduzierung über Frequenzverfahren. Das Ziel dieser Arbeit ist die Realisierung eines zeitspektralen Strömungslösers in den offenen Strömungslöser OpenFOAM® zur effizienten Berechnung zeitlich periodischer, inkompressibler Strömungen. Zunächst werden unterschiedliche zeitspektrale Methoden vorgestellt und hinsichtlich ihrer Eignung analysiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Time Spectral Method (TSM) weiter verfolgt, da auch nichtlineare Effekte modelliert werden können. Anschließend werden anhand einer Prototypengleichung die Eigenschaften der TSM den Eigenschaften herkömmlicher Zeitschrittverfahren gegenübergestellt.

Die Mehrzahl an Implementierungen der TSM basieren auf den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Eine direkte Anwendung auf inkompressible Strömungen ist daher nicht ohne Weiteres möglich. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Herleitung und Implementierung der TSM in einen Druckkorrektur-Algorithmus. Dazu werden unterschiedliche numerische Lösungsstrategien des gekoppelten Systems untersucht und mittels unterschiedlicher Strömungen verifiziert. Eine vollständige Kopplung aller Zeitinstanzen und Kontrollvolumina über ein Krylow-Unterraum-Verfahren stellt sich als geeignete Lösung für industrielle Probleme heraus.

Nach der Anwendung auf einfache Beispiele erfolgen Strömungssimulationen um ein mehrfach angeregtes Flügelprofil, einen Propeller und ein Lamellenventil. Die zeitlichen Moden der Strömungen werden analysiert und die Frage beantwortet, ob periodische Strömungen über eine geringe Anzahl an Frequenzen gut repräsentiert werden können. Simulationen mit Zeitschrittverfahren und der TSM werden durchgeführt und gegenübergestellt. Die Arbeit schließt ab mit einer Analyse der Potenziale und Grenzen des zeitspektralen Löses.

# Abstract

Computational fluid dynamics (CFD) is a well established tool in the product design process. Particularly it is used to design water pumps. In general these components are simulated using steady simulations with moving reference frames. The aim of these simulations are not only optimal hydraulic parameters, but also to improve customer comfort by reducing the noise level of the single components. Pressure fluctuations are one main source of noise. These fluctuations can be computed by unsteady simulations. At present unsteady simulations are quite costly in computational resources and memory, thus alternatives are sought.

The time periodic behaviour of fluid machines allows a model reduction using frequency methods. Thus in this work a time domain method to efficiently compute incompressible, periodic fluid flows is investigated and implemented into the open source software OpenFOAM®. First, different frequency and time domain methods are introduced and the time spectral method (TSM) is identified as a suitable approach as the method is able to solve nonlinear effects in time. Then the properties of the TSM are outlined using prototype equations instead of the more complex Navier-Stokes equations. The differences between the TSM and regular time stepping schemes are shown.

Different implementations of the TSM have been developed in the past. However, most are dedicated to compressible flow and thus cannot be used to solve for incompressible flows. Thus, in the first part of this work a formulation of the TSM within a pressure-correction algorithm is derived and implementation details are shown. Different numerical solution strategies to solve the coupled system are investigated and verified using simple flow problems. It is shown that a Krylov subspace method coupling all temporal and spatial nodes is well suited for industrial problems.

After the TSM has been applied to simple cases, more complex flow phenomena are computed. The flow around an oscillating blade profile, around a ship propeller and through a flutter valve are investigated. The temporal modes of the fluid flow are computed and the necessary amount of frequencies to represent the flow field is researched. Simulations using regular time stepping schemes and the TSM are performed and compared. The work concludes showing the potentials and limitations of the proposed method.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner dreijährigen Tätigkeit als Doktorandin in der Technischen Entwicklung bei der Volkswagen AG in Salzgitter.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Rolf Radespiel vom Institut für Strömungsmechanik der TU Braunschweig für die wissenschaftliche Betreuung. Er gab mir hilfreiche Anmerkungen mit auf den Weg und stellte wertvolle Kontakte für den fachlichen Austausch her.

Auch danke ich herzlich Herrn Prof. Dr. Norbert Kroll vom Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt in Braunschweig. Ein großer Dank gilt ebenso Herrn Dr. Arthur Stück vom Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik. Beide haben durch tiefgründige, fachliche Diskussionen und Ratschläge entscheidend zu dieser Arbeit beigetragen und ich habe den fachlichen Austausch stets als Ermutigung und Motivation empfunden.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Friedrichs vom Institut für Flugantriebe und Strömungsmaschinen der TU Braunschweig für die Übernahme des Vorsitzes bei diesem Promotionsverfahren.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank Herrn Dr. Andreas Gitt-Gehrke für die interne Betreuung bei Volkswagen während meiner gesamten Doktorandenzeit. Sowohl auf der fachlichen wie auch auf der menschlichen Ebene stand er mir stets mit einem guten Rat zur Seite.

Ein Dank gilt auch meinem Abteilungsleiter Herrn Stefan Lieske für die Möglichkeit diese Promotion in seiner Abteilung anzufertigen.

Ebenso möchte ich allen meinen Kollegen in der Technischen Entwicklung für den freundschaftlichen Umgang miteinander und die informativen Gespräche danken.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für einen immer vollen Kühlschrank.

Sabine Baumbach

Braunschweig, Februar 2019

Die Ergebnisse, Meinungen und Schlüsse dieser Dissertation sind nicht notwendigerweise die der Volkswagen AG.

*The results, opinions and conclusions expressed in this thesis are not necessarily those of Volkswagen AG.*





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Stand der Technik . . . . .	2
1.3	Zielsetzung . . . . .	5
1.4	Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Strömungsmechanische Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	8
2.2	Turbulenzmodellierung . . . . .	9
2.2.1	Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell . . . . .	10
2.3	Behandlung des wandnahen Bereichs . . . . .	11
2.4	Lösungsverfahren . . . . .	13
2.4.1	Räumliche Diskretisierung . . . . .	13
2.4.2	Zeitliche Diskretisierung . . . . .	15
2.4.3	Das algebraische Gleichungssystem . . . . .	16
2.4.4	Unterrelaxation . . . . .	18
2.5	Druck-Geschwindigkeitskopplung . . . . .	19
2.5.1	Das SIMPLE-Verfahren . . . . .	19
2.6	Randbedingungen . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Modellierung zeitlich periodischer Systeme</b>	<b>25</b>
3.1	Lineare und nichtlineare zeitspektrale Verfahren . . . . .	25
3.1.1	Time Linearized Frequency Domain Method . . . . .	25
3.1.2	Time Spectral Method . . . . .	27
3.2	Erweiterung der zeitspektralen Methode auf bewegte Geometrien . .	30
3.3	Gegenüberstellung TSM und Zeitschrittverfahren . . . . .	34
3.3.1	Genauigkeit der Zeitdiskretisierung . . . . .	34
3.3.2	Konvergenzeigenschaften einfacher iterativer Verfahren . . .	36
<b>4</b>	<b>Lösung des zeitspektralen Gleichungssystems</b>	<b>45</b>
4.1	Zeitspektrale dichte-basierte Verfahren . . . . .	45
4.2	Zeitspektrale Gleichungen innerhalb des Druckkorrektur-Algorithmus	50
4.3	Lösungsstrategien . . . . .	52
4.3.1	Zeitliches Jacobi-Verfahren . . . . .	52
4.3.2	Block-Gauß-Seidel-Verfahren mit direkter Block-Invertierung	54
4.3.3	Voll gekoppeltes zeitlich-räumliches System . . . . .	57

4.4	Behandlung der Turbulenzgleichungen . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Beurteilung der Güte der instationären Berechnungen</b>	<b>62</b>
5.1	Methoden zur Löserbewertung . . . . .	62
5.2	Simulationsmodelle . . . . .	65
5.2.1	Couette-Strömung . . . . .	65
5.2.2	Oszillierendes NACA0012-Profil . . . . .	69
5.3	Bewertung der zeitspektralen Lösungsstrategien . . . . .	71
5.3.1	Berechnungen mit Zeitschrittverfahren . . . . .	71
5.3.2	Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren . . . . .	77
5.4	Abgrenzung der zeitspektralen Löser . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Weiterführende Anwendungen</b>	<b>90</b>
6.1	Oszillierendes NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen . . .	90
6.1.1	Modellaufbau . . . . .	90
6.1.2	Berechnungen mit Zeitschrittverfahren . . . . .	92
6.1.3	Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren . . . . .	96
6.2	Propeller in Scherströmung . . . . .	100
6.2.1	Modellaufbau . . . . .	100
6.2.2	Berechnungen mit Zeitschrittverfahren . . . . .	102
6.2.3	Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren . . . . .	107
6.3	Ventilschwingung . . . . .	111
6.3.1	Modellaufbau . . . . .	111
6.3.2	Berechnungen mit Zeitschrittverfahren . . . . .	116
6.3.3	Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>124</b>
<b>8</b>	<b>Ausblick</b>	<b>127</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>128</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>134</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>136</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>137</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>139</b>
	<b>Programmverzeichnis</b>	<b>140</b>

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Innerhalb des Produktentwicklungsprozesses wird auf die bewährten Techniken der numerischen Strömungsmechanik, auch Computational Fluid Dynamics (CFD), zurückgegriffen. Vor allem im industriellen Umfeld spielen virtuelle Prototypen eine entscheidende Rolle, um Entwicklungszeiten und Fertigungskosten zu reduzieren. Die numerische Strömungsmechanik wird unter anderem zur Auslegung und Optimierung von Wasserpumpen genutzt. Die strömungsmechanische Berechnung erlaubt einen umfassenden Blick auf das Geschehen innerhalb der Pumpe und hilft dem Ingenieur die Pumpenströmung zu verstehen, entsprechend das Design anzupassen und eine optimale Auslegung zu erreichen.

Die numerische Strömungsmechanik liefert im Gegensatz zu Modellversuchen ein wesentlich umfassenderes Bild, da zu jedem Zeitpunkte alle Strömungsgrößen einsehbar sind. Gängig ist es, die strömungsmechanische Berechnung von Wasserpumpen stationär im Relativsystem durchzuführen. Mit steigenden Anforderungen an die Produkte steigen auch die Erwartungen an Berechnungsprozesse als Werkzeuge im Auslegungsablauf. Vor allem das Interesse, instationäre Strömungsprozesse innerhalb von Pumpen zu studieren, ist mit Blick auf akustische Phänomene stark gestiegen. Pumpen werden deshalb nicht nur auf den hydraulischen Wirkungsgrad hin berechnet und ausgelegt, sondern die CFD-Berechnung dient auch zur Analyse der durch die Strömung verursachten Oszillationen. Obwohl Software wie auch Hardware in den letzten Jahren große Entwicklungssprünge gemacht haben, ist die Berechnung instationärer Strömungen mit herkömmlichen Zeitschrittverfahren durch einen signifikanten Mehraufwand an Speicher- und Rechenressourcen gegenüber stationären Verfahren gekennzeichnet. Daher wird verstärkt nach Alternativen zu den herkömmlichen Zeitschrittverfahren gesucht.

Zeitlich periodische Strömungen nehmen eine Sonderposition bei der Berechnung instationärer Vorgänge ein. Die zeitliche Periodizität erlaubt eine Modellreduktion in der Zeit und damit einhergehend prinzipiell einen Gewinn an Rechenzeit. Verfahren, die die zeitliche Periodizität ausnutzen und die zeitlichen Schwankungen mit Fourier-Polynomen approximieren, sind als zeitspektrale Löser bekannt. Zeitspektrale Verfahren, wie z.B. die Time Linearized Frequency Domain Method (TLFD)

oder die Time Spectral Method (TSM) bieten eine potenzielle Alternative zu herkömmlichen Zeitschrittverfahren. Es muss dabei je nach Anwendungsfall abgewogen werden, welches Verfahren geeignet ist.

Bei Zeitschrittverfahren ist es häufig notwendig viele Perioden mit kleinen Zeitschritten zu rechnen, bis das System den periodischen Zustand erreicht hat und der Einfluss der Anfangsbedingungen abgeklungen ist. Dabei ist es nicht trivial, den Übergang zum periodischen Zustand zu bestimmen. Oftmals werden daher große Datenmengen aufgenommen und in Abhängigkeit der Anforderungen an die Genauigkeit der Messgröße wird aufwendig abgeschätzt, wann Periodizität erreicht ist. Im Gegensatz dazu reduziert sich bei zeitspektralen Verfahren der Einschwingprozess, da nur periodische Lösungen durch die Modellierung möglich sind. Alle Zeitpunkte innerhalb der Periode können über die Fourier-Koeffizienten rekonstruiert werden. Daher verbleiben nur die Fourier-Koeffizienten im Speicher. Ein weiterer Vorteil zeitspektraler Methoden ist die höhere zeitliche Genauigkeit bei periodischen Strömungen. Bei ausreichend Harmonischen in der Modellierung ist der zeitliche Fehler der zeitspektralen Verfahren bereits um Größenordnungen geringer als bei Zeitschrittverfahren.

Die Wahl des richtigen zeitspektralen Verfahrens ist abhängig vom Anwendungsfall, daher sind über die Jahre hinweg eine Vielfalt zeitspektraler Verfahren entwickelt worden. Der nachfolgende Abschnitt gibt einen Überblick der bestehenden Verfahren und der Anwendungsbereiche.

## 1.2 Stand der Technik

Der erste Ansatz einer effizienten Lösungsmethode für periodische Probleme ist die Time Linearized Frequency Domain Method (TLFDM), auch bekannt als Linearized Frequency Domain Method (LFD). Dabei handelt es sich um einen linearisierten Ansatz in der Zeit. Die Strömung wird in eine zeitlich-gemittelte Komponente und eine Störung zerlegt. Zahlreiche Anwendungen der Methode, unter anderem zur Berechnung aerodynamischer Lasten, Turbomaschinen, Flügelprofile und von Gesamtflugzeugen, finden sich in Hall und Crawley [31], Hall [30], Verdon [68], Hall et. al [33], Ronch et al. [20], Widhalm, Hübner und Thormann [72] und Tran und Liauzun[36]. Die Methode zeichnet sich durch ihre hohe Effizienz aus. Durch die Linearisierung können jedoch nichtlineare Effekte, wie Strömungsablösungen und Sekundärströmungen nicht abgebildet werden.

Um auch nichtlineare Effekte abbilden zu können, sind andere zeitspektrale Verfahren entwickelt worden. Bei der Harmonic Balance Method (HBM) [32] und der Time Spectral Method (TSM) [47, 29] werden die Strömungsgrößen als zeitliche Fourier-Polynome einer Basisfrequenz approximiert. Mehrere Vielfache der Basisfrequenz, auch Harmonische genannt, können zur Approximation der Strömungsgrößen genutzt werden. Für  $N$  Harmonische ergibt sich im Zeitraum ein System von  $2N + 1$

gekoppelten Gleichungen an  $2N + 1$  äquidistant in der Periode verteilter Kollokationspunkte. Der Zeitableitungsterm wird durch die Transformation in einen zeitspektralen Operator überführt, welcher die Strömungsgrößen an den  $2N + 1$  Kollokationspunkten miteinander koppelt. Bei der TSM wird im Gegensatz zur HBM ein analytischer Ausdruck für den zeitspektralen Kopplungsterm genutzt. Durch die zeitspektrale Diskretisierung ergibt sich im Vergleich zu herkömmlichen Zeitdiskretisierungen ein höherer Approximationsgrad. Da die Transformation allein auf der zeitlichen Ableitung basiert, bleibt die Diskretisierungen der Konvektions- und Diffusionsterme erhalten, so dass bereits vorhandene stationäre Löser ohne größere Änderungen verwendet werden können. Außerdem können aus stationären Lösern bekannte Konvergenzbeschleunigungsverfahren, wie Multigrid und Local Time Stepping [23], verwendet werden. Für eine große Anzahl an strömungsmechanischen Problemen ist nachgewiesen worden, dass bereits eine geringe Anzahl an Harmonischen ausreichend ist, um die Komplexität der Strömung ausreichend darzustellen [47]. Für diese Probleme zeigen die zeitspektralen Löser auch einen erheblichen Effizienzvorteil im Vergleich zu herkömmlichen Zeitschrittverfahren.

Zahlreiche Autoren haben dazu beigetragen die HBM und TSM weiterzuentwickeln und neue Anwendungsbereiche zu erschließen. Die häufigste Anwendung finden die Verfahren zur Berechnung von Strömungsprofilen, Tragflächen und dem Helikopter-Flug. So berechnet McMullen [47] den Auftriebskoeffizienten eines NACA-0012-Profiles bei einer  $Ma$ -Zahl von 0,796 und der reduzierten Frequenz von 0,0808 mit bis zu drei Harmonischen. Bei Mundis und Mavriplis [50] wird für das gleiche Profil bei  $Ma = 0,755$  und einer reduzierten Frequenz von 0,0814 mit bis zu 47 Harmonischen ebenfalls der Auftriebskoeffizient berechnet. Ähnliche Arbeiten für das NACA64A010-Profil sind in McMullen [47] und für das NACA0012-Profil in Mavriplis und Yang [45] zu finden.

Für den Vorwärtsflug des Caradonna-Tung-Rotors ohne Aufstieg bei  $Ma = 0,8$  nutzen Im et al. [35] 15 Harmonische. Bei Mavriplis, Yang und Mundis [46] wird ein Aufstiegs-Manöver des UH-60A-Helikopters mit sieben, neun und elf Kollokationspunkten simuliert. Weitere Anwendungen der TSM auf Helikopter-Manöver können Butsunorn [15] und Ekici, Hall und Dowell [24] entnommen werden. Aber auch zur Berechnung aerodynamischer Anregungen werden zeitspektrale Verfahren genutzt [41, 49]. Für instationäre, Gradienten-basierte Optimierungsverfahren erzielen TSM und HBM im Vergleich zu Zeitschrittverfahren geringere Speicher- und Rechenkapazitäten. Dies wird in Nadarajah und Jameson [52] anhand einer Flügeloptimierung gezeigt und in Huang [34] zur Optimierung von Turbomaschinen genutzt.

Auch die numerischen Aspekte der Methode wurden weiterentwickelt. Zur Berechnung periodischer Strömungen mit überlagert-abklingender, transients Lösung approximieren Mavriplis, Yang und Mundis [45] die Strömungsvariablen durch Superposition von zeitlichen Fourier-Polynomen und zusätzlichen abklingenden Polynomen. Das Hybrid BDF/ Time Spectral Method-Verfahren wird z.B. zur Berechnung von Helikopter-Manövern verwendet. Außerdem erweitern sie die Methode

zur Nutzung mit überlappenden Gittern. Gentili [27] zeigt in seiner Dissertation eine Methode, bei welcher nach verschiedener Anzahl an Harmonischen in unterschiedlichen Netzbereichen gelöst wird. Die Anzahl der Harmonischen passt sich adaptiv an die Komplexität der Berechnung an und der Rechenaufwand wird so reduziert. Für die Berechnung von mehrstufigen Strömungsmaschinen können auch Probleme mit von einander unabhängigen Frequenzen berechnet werden [57, 18]. Eine besondere Herausforderung liegt in der Lösung des Systems bei hoher Anzahl von Harmonischen. Zur stabileren Lösung des gekoppelten Systems schlagen Sicot, Puigt und Montagnac [66] einen impliziten Block-Jacobi-Algorithmus vor. In Anlehnung an diese Forschung nutzen Mundis und Mavriplis [51, 50] ein Newton-Verfahren um das nichtlineare System zu lösen. Die Funktionalität verschiedener Vorkonditionierer und linearer Löser wird untersucht. Es ist anzumerken, dass die Vielzahl an Entwicklungen auf den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und kompressiblen Strömungslösern basieren.

Zeitspektrale Löser finden bisher vor allem im Bereich der Turbomaschinen Anwendung. Dabei handelt es sich meist um kompressible Strömungen. Zur Berechnung kompressibler Strömungen werden fast ausschließlich dichtebasierte Verfahren eingesetzt. Bei inkompressiblen Problemen ist im Gegensatz zu kompressiblen Problemen die Gewährleistung eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes nicht mehr über eine Dichtegleichung gegeben. Die Dichte ist bei inkompressiblen Strömungen im gesamten Strömungsgebiet unveränderlich. Dies resultiert in einer unbegrenzten Schallgeschwindigkeit des Fluids und erzeugt somit unbegrenzte Eigenwerte im System. Wegen der großen Unterschiede in den Eigenwerten resultiert ein steifes Gleichungssystem. Um dennoch inkompressible Strömungen basierend auf den kompressiblen Lösern berechnen zu können, ist die Artificial Compressibility Methode (AC) entwickelt worden [16]. Hier wird zusätzliche eine Zeitableitung des Druckes in die Massenbilanz eingeführt. Das elliptische Gleichungssystem wird in ein hyperbolisches System überführt. Das Gleichungssystem wird mit den herkömmlichen numerischen Methoden lösbar. Jameson [37] zeigt die Funktionalität der AC-Methode in Verbindung mit TSM, in dem er die laminare Strömung um ein NACA0012-Profil berechnet. Er berichtet zudem, dass die TSM in Kombination mit AC zu Stabilitätsproblemen führt. Die Methode eignet sich nur für geringe reduzierte Frequenzen und kleine Amplituden. Für einen oszillierenden AGARD-Flügel kann mit 32 Harmonischen maximal eine reduzierte Frequenz von 0,2 bei einer Amplitude von 0,08 aufgelöst werden. Auch Anthaume [8] zeigt weitere Beispiele dieser Methode.

Es gibt auch den Ansatz, statt der Navier-Stokes-Gleichungen die Wirbelstärke-Stromfunktion zeitspektral zu lösen [69]. Für 2D-Berechnungen reduziert sich das System auf zwei Gleichungen. Der Druck ist keine abhängige Variable mehr und wird, nachdem das Geschwindigkeitsfeld bestimmt wurde, nachträglich über die Poisson-Gleichung gelöst. Die Erweiterung der Methode auf drei Dimensionen ist jedoch schwierig. Es ergeben sich im Dreidimensionalen sechs partielle Differentialgleichungen, statt wie bei der Druck-Geschwindigkeitskopplung vier Gleichungen.

Außerdem ist die Formulierung von Randbedingungen bei komplexen Strömungsgebieten schwierig, da die Wirbelstärke an scharfen Kanten singulär ist [26].

Zur Berechnung instationärer, inkompressibler Strömungen bindet Luder [44] die zeitspektrale Diskretisierung in einen Druckkorrektur-Algorithmus ein. Die Effizienz des Druckkorrektur-Algorithmus in Verbindung mit der TSM wird an einem oszillierenden Flügelprofil und einer Axialmaschine demonstriert. Das nichtlineare Gleichungssystem wird über die Picard-Iteration linearisiert und mit Hilfe des Block-Gauß-Seidel-Verfahrens iterativ gelöst. Die einzelnen Blöcke umfassen alle Kontrollvolumina eines Kollokationspunktes. Er zeigt außerdem, dass die Konvergenz des Gleichungssystems stark abhängig von dem Unterrelaxationsfaktor ist. Das gleiche Verfahren wird auch von Cvijetic, Jasak und Vukcevic [19] auf ein flatterndes NACA2412-Profil und einen Onera-M6-Flügel angewandt. Auch hier zeigt sich eine starke Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens des Systems vom Unterrelaxationsfaktor. Auf Basis des Stands der Technik ergibt sich die Zielsetzung der folgenden Arbeit.

## 1.3 Zielsetzung

Der Stand der Technik zeigt, dass zeitspektrale Verfahren für kompressible Strömungen schon weit entwickelt sind. Für inkompressible Anwendungen lassen sich jedoch nur wenige Quellen finden. Das Lösen des gekoppelten, zeitspektralen Gleichungssystems ist zudem mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Eine steigende Anzahl an Harmonischen und höhere Frequenzen reduzieren die Konvergenzeigenschaften des gekoppelten Systems. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Erprobung und Bewertung eines neuen Ansatzes eines zeitspektralen Löser zur Berechnung viskoser, inkompressibler, periodischer Strömungen innerhalb des offenen Strömungslösers OpenFOAM®. Die TSM wird als zeitspektrale Methode gewählt. Eine besondere Eigenschaft des zeitspektralen Löser ist die Auflösung der Druck-Geschwindigkeitskopplung über ein Druckkorrektur-Verfahren. Die Lösung nach den einzelnen Strömungsgrößen erfolgt entkoppelt. Im Gegensatz zu zeitspektralen, dichtebasierten Verfahren entfällt somit das Aufstellen und Lösen einer Jacobi-Matrix.

Im Mittelpunkt der Arbeit steht die Weiterentwicklung der numerischen Aspekte inkompressibler, zeitspektraler Löser. Die Rechenzeiteffizienz, die Stabilität und das Konvergenzverhalten zeitspektraler Löser sind abhängig von der Auflösung der zeitlichen und räumlichen Kopplung der Impulsgleichungen. Daher sind im Rahmen dieser Arbeit vier neue Konzepte zur Kopplung entwickelt und untersucht worden. Im ersten Konzept werden die räumlichen Blöcke eines Kollokationspunktes über ein zeitliches Jacobi-Verfahren gelöst. Um eine stärkere zeitliche Kopplung zu bekommen, werden im zweiten Konzept alle Kollokationspunkte pro



Kontrollvolumen (KV) über ein Block-Gauß-Seidel-Verfahren mit direkter Block-Invertierung gelöst. In den letzten beiden Konzepten werden alle räumlichen und zeitlichen Blöcke nach den Kollokationspunkten geordnet über ein GMRES-Verfahren vorkonditioniert mit inkompletter LU-Zerlegung berechnet. Die Kopplungsstrategien werden in den Punkten Konvergenzeigenschaften, Speicherbedarf und Rechenzeit anhand einer Couette-Strömung und eines oszillierenden Flügelprofils gegenübergestellt. Die Arbeit leistet damit einen Beitrag zur Verbesserung vorhandener inkompressibler, zeitspektraler Löser. Außerdem sind unterschiedliche Netzbewegungskonzepte im Rahmen des zeitspektralen Löser nutzbar, sowohl Starrkörperrotation als auch Arbitrary Lagrange Euler (ALE) sind in dem zeitspektralen Löser implementiert. Zur Berechnung turbulenter Fälle wird das Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell um die zeitspektrale Formulierung erweitert.

Ein zweiter Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung und Bewertung des Potenzials und der Grenzen der zeitspektralen Methode im industriellen Umfeld. Bisher ist noch unklar, ob eine Reduzierung der Strömung auf wenige Harmonische für komplexe Berechnungsfälle ausreichend ist. Es werden daher die Strömung um ein mehrfach angeregtes Flügelprofil, einen Propeller und ein Flutterventil berechnet. Zunächst werden die Testfälle mit herkömmlichen instationären Zeitschrittverfahren gelöst. Die Ergebnisse werden gezielt auf das zeitliche Verhalten der Strömung untersucht. Modalanalysen integraler Kennwerte und des Strömungsfeldes werden durchgeführt. Es wird die Hypothese geprüft, ob wenige Harmonische ausreichend sind auch komplexe Berechnungsfälle abzubilden. Die Analysen tragen dazu bei, die Strukturen zeitlich aufgelöster Strömungen besser zu verstehen.

Abschließend werden die angeführten Testfälle mit der TSM berechnet und die Ergebnisse der TSM und der Zeitschrittverfahren gegenübergestellt. Die Frage, ob eine Rechenzeit- und eine Speicherreduzierung von TSM gegenüber Zeitschrittverfahren ausgewiesen werden kann, wird beantwortet. Zudem wird die Sensitivität der TSM auf hohe Netz-Seitenverhältnisse, hohe Frequenzen und eine hohe Anzahl an Harmonischen bewertet. Die Potenziale und Einschränkungen der TSM werden aufgezeigt. Die Arbeit soll dazu beitragen, das Potenzial der TSM auch für inkompressible Anwendungen zu erschließen.

### 1.4 Aufbau der Arbeit

- **Kapitel 2** gibt die strömungsmechanischen und numerischen Grundlagen wieder. Die Bilanzgleichungen für inkompressible Fluide werden dargelegt und das Spalart-Allmaras-Modell als Schließung des Gleichungssystems erklärt. Anschließend werden die Diskretisierung des Rechengebiets und die Terme der Erhaltungsgleichung erläutert. Druckbasierte Algorithmen werden eingeführt und Randbedingungen erläutert.

- In **Kapitel 3** werden die zeitspektralen Methoden vorgestellt und die Gleichungen basierend auf den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Die Diskretisierung der Netzflüsse durch bewegte Netze wird erklärt und Randbedingungen abgeleitet. Die Eigenschaften der zeitspektralen Methode werden anhand einer 1D-Advektionsgleichung mit diffusivem Term untersucht und den herkömmlichen Zeitschrittverfahren gegenübergestellt.
- **Kapitel 4** stellt den Kern der Arbeit dar. Zunächst werden die Lösungsverfahren für zeitspektrale Systeme basierend auf dichtebasierten Algorithmen vorgestellt, bevor auf druckbasierte Algorithmen eingegangen wird. Weiterentwicklungen eines druckbasierten, zeitspektralen Löser werden im Detail vorgestellt.
- In **Kapitel 5** erfolgt eine erste Bewertung instationärer Strömungen anhand zweier Berechnungsfälle. Herkömmliche Zeitschrittverfahren werden hierbei den zeitspektralen Verfahren gegenübergestellt. Es erfolgt eine Validierung anhand einer Couette-Strömung. Anschließend werden die zeitspektralen Lösungsstrategien in Speicheraufwand, Leistung und Stabilität verglichen.
- Zur Darstellung der Einsatzmöglichkeiten der zeitspektralen Löser werden in **Kapitel 6** komplexere Anwendungsfälle untersucht. Um die zeitspektrale Methode zu verifizieren und deren Leistungsfähigkeit zu bewerten, werden herkömmliche Zeitschrittverfahren zur Berechnung verwendet und die auftretenden Moden analysiert. Es werden Strömungen um ein 2D-Profil, einen Propeller und eine Ventilschwingung untersucht.
- Abschließend erfolgt in **Kapitel 7** die Zusammenfassung der Arbeit und es wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen gegeben.

---

## 2 Strömungsmechanische Grundlagen

In den nachfolgenden Abschnitten werden die Grundlagen für die strömungsmechanische Berechnung hergeleitet. Es werden die Erhaltungsgleichungen zur Berechnung viskoser, inkompressibler Strömungen dargestellt. Außerdem wird auf die Modellierung der Turbulenz, vor allem auf den Ansatz der Reynoldsen-Mittelung eingegangen, bevor die Diskretisierung der einzelnen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen erläutert wird. Darauf folgend werden geeignete Randbedingungen erklärt, mit denen die Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Da inkompressible Strömungen im Vordergrund dieser Arbeit stehen, werden die speziellen Verfahren zur Lösung inkompressibler Gleichungssysteme erläutert.

### 2.1 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Inkompressible Fluide werden durch die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls beschrieben. Diese Gleichungen werden auch Navier-Stokes-Gleichungen genannt. Die Dichte  $\rho$  ist bei inkompressiblen Fluiden keine Funktion des Drucks, daher sind die Gleichungen nur nach vier Variablen, den Geschwindigkeitskomponenten  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  und dem Druck  $p$ , zu lösen. Die Geschwindigkeit und der Druck sind Funktionen der Zeit  $t$  und der drei Ortskomponenten  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Die Summe aus dem Volumenintegral  $\int_{\Omega}$  der zeitlichen Ableitung der Erhaltungsgrößen  $\mathbf{W}$  und der Divergenz der transportierten Flüsse  $\mathbf{F}$  bilden ein System integraler Erhaltungsgleichungen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) d\Omega = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{S}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad (2.4)$$

wo  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix,  $\mu$  die dynamische Viskosität und  $\mathbf{S}$  der Deformationstensor sind. Diese Formulierung gilt unter Annahme Newtonscher Fluide. Andere Materialgesetze werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet. Bei unveränderlicher Dichte entfällt die Zeitableitung der Dichte.

Die Erhaltungsgleichungen lassen sich in Integral- und Differentialform angeben. Die Integralform gilt für ein endliches Kontrollvolumen  $\Omega$  und die Differentialform für ein infinitesimal kleines Volumenelement. Da die differentielle Form

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

mathematisch anschaulicher ist, wird diese für die nachfolgenden Ausführungen genutzt. Bei den Gleichungen handelt sich um partielle, nichtlineare Differentialgleichungen. Die Linearisierung, Diskretisierung und die Modellierung der kleinen Skalen, um die Gleichungen numerisch zu lösen, werden nachfolgend erklärt.

## 2.2 Turbulenzmodellierung

Bei Überschreitung eines kritischen Verhältnisses von Trägheit- zu Zähigkeitskräften geht die geordnete, laminare Strömung in turbulente Strömung über. Diese Strömung ist instationär, dreidimensional und weist starke fluktuierende Geschwindigkeitsfelder auf. Eine Bandbreite an unterschiedlichen Skalen, die miteinander wechselwirken, ist für diese Strömung charakteristisch. Eine direkte Beschreibung der Turbulenz ist grundsätzlich durch die Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Eine Vielzahl technischer Anwendungen sind turbulent. Die Notwendigkeit numerischer Strömungssimulationen in der Praxis und die Vielfalt an Skalen innerhalb turbulenter Strömungen führten zur Entwicklung verschiedener Modelle zur Behandlung von Turbulenz [56].

Die bekanntesten Ansätze, um die Turbulenz zu modellieren, sind die Direkte Numerische Simulation (DNS), die Large Eddy Simulation (LES) und die Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS). Ausführliche Beschreibungen zu den Ansätzen finden sich in Pope [56]. Im Rahmen dieser Arbeit wird der RANS-Ansatz genutzt, da er auch bei komplexen Industrieberechnungsfällen zu vertretbaren Rechenzeiten führt. Dieser Ansatz basiert auf den Gleichungen von Reynolds [58] aus dem Jahre 1894. Alle Strömungsfelder werden nach Reynolds in ihr statistisches Mittel und eine stochastische turbulente Schwankung zerlegt.

Die Mittelung wird auf alle Größen der Kontinuitäts- und Impulsgleichungen angewendet. Für die linearen Terme ergeben sich ähnliche Terme, wie in der Navier-Stokes-Gleichung. Die Mittelung des konvektiven, nichtlinearen Terms führt jedoch zu einem zusätzlichen Term, den Reynolds-Spannungen.

Durch die Mittelung sind mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden. Zur Schließung des Systems wurden Turbulenzmodelle entwickelt. Sie stellen eine Relation zwischen den gemittelten Größen und dem zusätzlichen Term her. Im Laufe der Zeit haben sich unterschiedlich komplexe Turbulenzmodelle entwickelt. Unter anderem werden algebraische, Ein- bzw. Zweigleichungsmodelle und Reynolds-Spannungsmodelle verwendet [56]. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell verwendet, da es ein Standardmodell in der Industrie zur Berechnung turbulenter Strömungen ist. Eine nähere Vorstellung des Modells erfolgt im nächsten Abschnitt.

### 2.2.1 Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell

Das Spalart-Allmaras-Modell (SA) ist eines der bekanntesten Turbulenzmodelle. Ab der Vorstellung des Modells im Jahre 1992 [67] wurden verschiedene Modifikationen zur Stabilisierung und Erweiterung entwickelt [3]. Obwohl die Komplexität des Modells im Vergleich zu Zweigleichungs- oder Reynolds-Spannungsmodellen geringer ist [56], ist es eines der weit verbreitetsten Modelle. Durch die Einfachheit der Implementierung liefert das Modell auch für unstrukturierte Gitter gute Ergebnisse [6]. In den letzten Jahren ist das Interesse am SA-Modell vor allem im Bereich der Turbomaschinenberechnung [25, 53] und der Flugzeugaerodynamik [48] gestiegen.

Das Modell basiert auf empirischer Herleitung und ist auf unterschiedliche Anwendungsgebiete, wie beispielsweise freie Wandströmung, Strahl und Flügelprofilströmungen, erprobt und validiert worden [67]. Mit der Boussinesq-Approximierung kann die Turbulenzvariable  $\tilde{\nu}$  über die Transportgleichung

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \tilde{\nu}) = \underbrace{c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}}_{\text{Produktionsterm}} - \underbrace{c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{w} \right)^2}_{\text{Dissipation der Wirbelviskosität}} + \frac{1}{\sigma} \left( \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2 \right) \quad (2.6)$$

beschrieben werden. Hierbei ist  $w$  der Abstand zur nächsten Wand und  $\tilde{S}$  die modifizierte Wirbelstärke. Der von Spalart und Allmaras vorgeschlagene zusätzliche Senkenterm [3] zur Behandlung von Transition ist in der Gleichung vernachlässigt, da nachfolgend nur vollturbulente Strömungen behandelt werden. Die Gleichung

besteht aus Termen zur Diffusion, Anti-Diffusion, Produktion und Dissipation der Wirbelviskosität. Die einzelnen Terme ergeben sich über folgende Zusammenhänge

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1}, \quad (2.7)$$

$$\chi := \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 w^2} f_{\nu 2}, \quad (2.9)$$

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}, \quad (2.10)$$

$$f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}, \quad (2.11)$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad (2.12)$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad (2.13)$$

$$r = \min \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 w^2}, r_{lim} \right). \quad (2.14)$$

Dabei sind die Konstanten für das SA-Modell

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0,1355, \quad c_{b2} = 0,622, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0,3, \quad c_{w3} = 2, \\ c_{\nu 1} &= 2, \quad c_{\nu 2} = 5, \\ \kappa &= 0,41, \quad \sigma = 2/3. \end{aligned}$$

Als Randbedingungen zur Lösung der turbulenten Transportgleichung wird für  $\tilde{\nu}$  an festen Wänden  $\tilde{\nu} = 0$  und an Symmetrieebenen  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} = 0$  gesetzt [3]. Zur Abschätzung der Turbulenz werden turbulente Viskosität und molekulare Fluidviskosität ins Verhältnis gesetzt. Hier gelten für vollausgebildete Strömungen der Außen aerodynamik  $\frac{\nu_t}{\nu} \approx 0,2 - 1,3$  [3]. Für interne Strömungen ergeben sich höhere Verhältnisse. Werte an den Rändern können über geeignete Korrelationen abgeschätzt werden.

## 2.3 Behandlung des wandnahen Bereichs

Viskose Effekte treten vor allem im Bereich der Wand auf, daher ist hier gesondert auf die Modellierung der Grenzschicht zu achten. Zwei Herangehensweisen haben sich etabliert: Low-Re-Turbulenzmodelle und Wandfunktionen [64].

In der Nähe der Wand bildet sich eine turbulente Grenzschicht aus. Durch umfangreiche Untersuchungen, vor allem anhand der Couette-Strömung, wurde herausgefunden, dass im wandnahen Bereich ähnliche Geschwindigkeitsverteilungen bei dimensionsloser Darstellung auftreten. Diese Erkenntnisse sind in dem universellen Wandgesetz zusammengefasst [63]. Die Darstellung dieser Gesetzmäßigkeiten erfolgt mittels dimensionsloser Kenngrößen. Zur dimensionslosen Darstellung wird die Wandschubspannung  $\tau_w$  bzw. die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  eingeführt

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (2.15)$$

Charakteristisch für die Auflösung der wandnahen Grenzschicht sind der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  und die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$ . Beide Kennzahlen berechnen sich über

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (2.16)$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad (2.17)$$

wobei  $y$  der Abstand des ersten Kontrollvolumens zur Wand,  $\nu$  die dynamische Viskosität und  $\bar{u}$  die wandparallele Geschwindigkeit sind. Die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe wird in drei Bereiche unterteilt:

- viskose Unterschicht:  $0 \leq y^+ < 5$ ,
- Übergangsschicht:  $5 < y^+ < 70$ ,
- Überlappungsschicht:  $70 < y^+$ .

Die exakten Gesetzmäßigkeiten der einzelnen Bereiche können Schlichting [63] entnommen werden.

Bei Low-*Re*-Turbulenzmodellen wird die viskose Unterschicht durch eine entsprechende Vernetzung numerisch aufgelöst. Dies erfordert bei hohen *Re*-Zahlen sehr feine Randschichten. Für komplexe Geometrien kann die Auflösung der viskosen Unterschicht in den Randzellen zu hohen Seitenverhältnissen, auch als Aspect Ratios (AR) bekannt, führen. Neben dem Anstieg in Rechenzeit durch mehr Zellen führen hohe AR zu herabgesetzten Konvergenzeigenschaften in den Verfahren zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme [64].

Daneben können auch Wandfunktionen genutzt werden. Bei diesen wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Wandschubspannung hergestellt, dadurch ergeben sich geringere Anforderungen an die Auflösung. Im Rahmen dieser Arbeit wird das SA-Modell mit Wandfunktionen genutzt. Ein Ansatz für Wandfunktionen für das SA-Modell findet sich in [40].

## 2.4 Lösungsverfahren

Nachdem die Gleichungen zur Berechnung inkompressibler, viskoser Strömungen eingeführt wurden, wird das kontinuierliche Problem nun durch eine Diskretisierung auf ein algebraisches Gleichungssystem zurückgeführt. Die einzelnen Schritte von dem nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungssystem zu einem linearen System werden nachfolgend erklärt und orientieren sich an Ferziger und Peric [26]. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Druck-Geschwindigkeitskopplung und der Zeitdiskretisierung. Die Kopplung dient auch als Ausgangspunkt der zeitspektralen Verfahren, die in Kapitel 3 vorgestellt werden.

### 2.4.1 Räumliche Diskretisierung

Zur Lösung der Erhaltungsgleichung wird eine Finite-Volumen-Methode (FVM) genutzt. Das Berechnungsgebiet wird dazu in eine endliche Anzahl nicht überlappenden Kontrollvolumen (KV) zerlegt. Die KV füllen den Lösungsraum komplett ohne Überlappungen aus und die Position des KV-Mittelpunkts ist über die Lage der Ränder der KV festgelegt.

Ein beispielhaftes KV mit zwei benachbarten KV ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Der KV-Mittelpunkt  $C$  ist umschlossen von den hier sechs KV-Oberflächen. Angrenzend findet sich die benachbarten KV  $N$ . Die Diskretisierung bei der FVM ist unabhängig von der Wahl der Elemente. Es werden u.a. Polyeder verwendet. Dies erlaubt auch die Vernetzung und Berechnung komplexer Geometrien. Je nach Netzelement unterscheidet sich die Anzahl der KV-Oberflächen, benachbarter KV und Nachbarkanten.

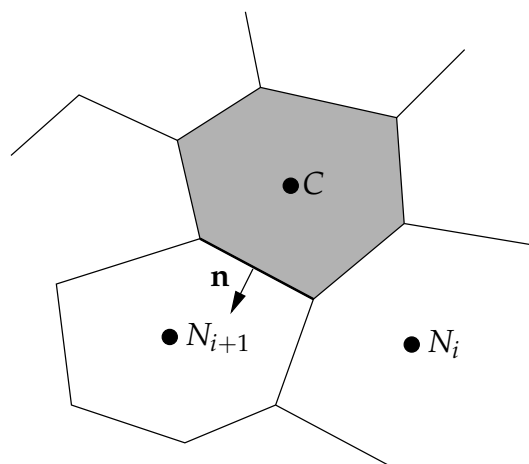


Abbildung 2.1: Kontrollvolumen  $C$  getrennt durch KV-Rand mit den benachbarten KV  $N$



Der Ausgangspunkt der FVM ist die integrale Form der Erhaltungsgleichungen. Diese Gleichung wird nach dem Gaußschen Integralsatz umgeformt in

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Gamma} (\mathbf{u}\mathbf{u} - 2\nu_{eff}\mathbf{S}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla p d\Omega. \quad (2.18)$$

Die konvektiven und diffusiven Terme werden dadurch von Volumen- in Oberflächenintegrale transformiert. Da keine volumenspezifischen Quellterme im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt werden, ist Gleichung 2.18 ohne Quellterme dargestellt. Eine Netzbewegung wird zunächst ebenfalls in den Gleichungen vernachlässigt. Die Gleichung muss auf jedem KV erfüllt sein. Zur numerischen Berechnung erfolgt eine Diskretisierung der Gleichung auf KV-Ebene. Die Diskretisierung ist in mehrere Schritte unterteilt. Im ersten Schritt werden die Volumen- und Oberflächenintegrale durch bekannte Werte im KV approximiert.

Für eine generische Größe  $\phi$  ist die Approximierung der Integrale mit

$$\int_{\Omega} \phi d\Omega \approx \phi_c \Delta\Omega_c \quad (2.19)$$

gegeben. Das Volumenintegral  $\int_{\Omega}$  wird über den Variablenwert  $\phi_c$  im KV-Mittelpunkt multipliziert mit dem finiten Volumen  $\Delta\Omega_c$  approximiert. Das Oberflächenintegral kann mit

$$\oint_{\Gamma_f} \phi d\Gamma \approx \phi_f \Delta\Gamma_f \quad (2.20)$$

approximiert werden. Dabei ist  $\phi_f$  der Variablenwert auf der KV-Oberfläche multipliziert mit der Flächennormalen  $\Delta\Gamma_f$  der KV-Oberfläche  $f$ .

Die Ermittlung des Konvektions- und Diffusionsterms erfordern geeignete Berechnungsvorschriften. Die Genauigkeit und der Aufwand dieser Verfahren sind abhängig von der Lage und der Anzahl der Stützstellen, die für die Interpolation genutzt werden.

Zuerst wird die Approximierung der konvektiven Flussterme betrachtet. Zur Integration der KV-Oberflächen wird u.a. die Mittelpunkts-, die Trapez- oder die Simpsonsche-Regel genutzt. Nach der Mittelpunktsregel ergeben sich die konvektiven Flüsse zu

$$F_{f,Konv.} = \int_{\Gamma_f} \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \approx [\phi \mathbf{u}]_{n,f} \Delta\Gamma_f, \quad (2.21)$$

wo  $u_{i,n}$  die Normalenkomponente des Geschwindigkeitsvektors  $u_i$  an Stelle  $f$  ist. Die Indices  $i, j$  stehen für die jeweiligen Geschwindigkeitskomponente.

Die Approximation des diffusiven Terms erfolgt auch über die oben genannten numerischen Integrationsverfahren. Mit der Mittelpunktsregel resultiert der diffusive Term in

$$F_{f,Diff.} = \int_{\Gamma_f} \nu \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \approx \nu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{n},f} \Delta \Gamma_f. \quad (2.22)$$

Anschließend werden die Gradienten auf den KV-Oberflächen benötigt. Die Berechnung der Größen erfolgt über Diskretisierungsansätze. Für die konvektiven und diffusiven Flüsse werden neben den Variablen selbst auch deren Ableitungen benötigt. Zur Approximation der Werte sind aus der Literatur unterschiedliche Verfahren bekannt [26, 54]. Der Konvektionsterm wird z.B. mit dem Stromaufwärts-, zentralen Differenzen-, QUICK- oder vanLeer-Verfahren angenähert. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Stromaufwärts-Verfahren zweiter Ordnung genutzt.

## 2.4.2 Zeitliche Diskretisierung

Bei instationären Strömungen muss neben der räumlichen Diskretisierung auch die zeitliche Ableitung approximiert werden. Bei inkompressiblen Strömungen ist die Dichte unveränderlich. Die zeitliche Ableitung der Dichte ist daher Null. Zunächst erfolgt wieder eine Approximation des integralen Ausdrucks mit bekannten Werten. Die Zeitableitung wird durch die Werte im Mittelpunkt des KV angenähert und mit dem Volumen des KV  $\Delta \Omega_c$  multipliziert

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega \approx \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_c \Delta \Omega_c. \quad (2.23)$$

Für die Diskretisierung der Zeitableitung  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  können unterschiedliche Zeitschrittverfahren verwendet werden. Um instationäre Systeme zu berechnen, wird die Zeit schrittweise vorangetrieben. Dazu wird jeder Term der Erhaltungsgleichung über eine Zeitschrittweite  $\Delta t$  integriert und so die Lösung zu der Zeit  $t^{n+1}$  bestimmt. Der Exponent  $n$  steht dabei für den jeweiligen Zeitschritt. Nach der Zeit wird also beginnend von den Anfangsbedingungen in Schritten der Größenordnung  $\Delta t$  vorwärts gelöst.

Als Diskretisierungsansätze für die Zeitableitung werden Verfahren erster, zweiter oder höherer Ordnung verwendet. Es wird unterschieden zwischen impliziten und expliziten Verfahren. Ein implizites Verfahren erster Ordnung ist über

$$u_i^{n+1} = \Delta t R_i(u_i^{n+1}) + u_i^n \quad (2.24)$$

und ein Verfahren zweiter Ordnung über

$$u_i^{n+1} = \Delta t R_i(u_i^{n+1}) + \frac{4}{3}u_i^n - \frac{1}{3}u_i^{n-1} \quad (2.25)$$

gegeben, wo der Operator  $R$  die örtlichen Diskretisierungen der anderen Terme der Erhaltungsgleichung darstellt. Der hochgestellte Index  $n$  kennzeichnet den Zeitschritt und der tiefgestellte Index  $i$  die Geschwindigkeitskomponente. Beim Verfahren erster Ordnung in Gleichung 2.24, auch bekannt als Euler-Verfahren, wird die Zeit an zwei Stützstellen  $(n, n+1)$  angenähert, während bei dem Verfahren zweiter Ordnung in Gleichung 2.25 drei Stützstellen  $(n+1, n, n-1)$  verwendet werden. Es ist ersichtlich, dass mit höherer Ordnung des Zeitdiskretisierungsverfahrens der Speicheraufwand steigt, da mehr zeitliche Stützstellen im Speicher verbleiben, um den neuen Zeitschritt zu berechnen.

Innerhalb dieser Arbeit werden nur implizite Zeitschrittverfahren verwendet. Explizite Verfahren sind im Allgemeinen instabiler als implizite Verfahren, da die Zeitschrittweite durch die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL) beschränkt ist. Der Zeitschritt wird in Abhängigkeit der Netzauflösung  $\Delta x$  und der Geschwindigkeit  $u$  zu

$$CFL = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (2.26)$$

gesetzt. Das explizite Euler-Verfahren ist nur stabil für  $CFL < 1$ , während das implizite Euler-Verfahren auch  $CFL > 1$  erlaubt. Bei dem expliziten Euler-Verfahren reduziert sich daher der Zeitschritt mit zunehmender Geschwindigkeit und feineren Netzen.

Die Rate des Fehlers ist abhängig von der Ordnung des Diskretisierungsverfahrens. Die Fehlerrate des Euler-Verfahrens ist proportional zu  $\Delta t$ , während die Fehlerrate eines Diskretisierungsverfahrens zweiter Ordnung proportional zu  $\Delta t^2$  ist. Der Fehler eines Verfahrens zweiter Ordnung reduziert sich damit schneller als der Fehler des Euler-Verfahrens. Die Wahl des Zeitschrittes ist Problem abhängig zu wählen und für jeden Berechnungsfall die zeitlichen Fehler bei unterschiedlicher Zeitschrittweite zu prüfen.

### 2.4.3 Das algebraische Gleichungssystem

Nachdem alle räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsansätze vorgestellt wurden, wird nun auf das algebraische Gleichungssystem eingegangen.

Da der Konvektionsterm nichtlinear ist, führt eine direkte Diskretisierung dieses Terms zu einem quadratischen Gleichungssystem. Der nichtlineare Term wird daher über die Picard-Iteration linearisiert. Das bedeutet, dass der Massenfluss über die KV-Oberfläche als bekannt angenommen wird. Der konvektive Term innerhalb

des Defektkorrekturschrittes ergibt sich aus dem Massenfluss des alten Iterationschrittes und der noch unbekannten Geschwindigkeit im KV-Mittelpunkt zu

$$[u_{i,n}\Delta\Gamma]_f^k u_{j,f}^k \approx [u_{i,n}\Delta\Gamma]_f^{k-1} u_{j,f}^k, \quad (2.27)$$

hierbei kennzeichnen die Indices  $i, j$  die Geschwindigkeitskomponente,  $n$  die Normalenkomponente der Geschwindigkeit,  $f$  die KV-Oberfläche und  $k$  den Iterationschritt.

Bei stationären Problemen ist der Einfluss durch die Linearisierung vernachlässigbar, da die Abweichung von  $[u_{i,n}\Delta\Gamma]_f^k u_{j,f}^k - [u_{i,n}\Delta\Gamma]_f^{k-1} u_{j,f}^k$  bei Konvergenz gegen Null geht. Bei instationären Rechnungen muss die Abweichung in jedem Zeitschritt ein zuvor definiertes Residuum erreichen. Die zusätzlichen Schleifen innerhalb eines instationären Rechenlaufs über den konvektiven Term werden als Defektkorrekturschleifen bezeichnet. Es ergibt sich daraus bei einem Zeitschritt  $n$  Iterationsvorschrift 2.1.

<code>//Zeitschrittschleife</code>	1
<code>for n = 1, ..., N do</code>	2
<code>//Druckkorrektur-Iteration</code>	3
<code>for k = 1, ..., K do</code>	4
Löse Impulsgleichung	5
Löse Druckkorrekturgleichung	6
<code>if ([u<sub>i,n</sub>ΔΓ]<sub>f</sub><sup>k</sup>u<sub>j,f</sub><sup>k</sup> - [u<sub>i,n</sub>ΔΓ]<sub>f</sub><sup>k-1</sup>u<sub>j,f</sub><sup>k</sup> &lt; Toleranz) Stop</code>	7
<code>end for</code>	8
<code>end for</code>	9

Programm 2.1: Iterationsvorschrift instationärer Rechnungen

Durch diese Linearisierung resultiert ein lineares, algebraisches Gleichungssystem. Die Anzahl der Unbekannten skaliert mit  $4 \times$  KVs. Die Bilanzgleichungen müssen für jedes KV erfüllt sein. Die Variablenwerte werden durch die Werte im KV-Mittelpunkt bzw. auf den KV-Oberflächen angenähert und mit den Variablenwerten der benachbarten KV in Beziehung gesetzt. Für jedes KV  $c$  ergibt sich daher eine Einzelbilanz. Alle Einzelbilanzen werden in ein Gesamtsystem der Form

$$\mathbf{A}_c \mathbf{u}_c + \sum_l \mathbf{A}_l \mathbf{u}_l = \mathbf{Q}_c \quad (2.28)$$

sortiert, wo  $\mathbf{A}_c$  die Diagonaleinträge der Lösungsmatrix,  $\mathbf{A}_l$  die Nebendiagonaleinträge und  $\mathbf{Q}_c$  die Quellterme bezeichnet. Die Diagonaleinträge stammen z.B. aus der zeitlichen Ableitung. Die Nebendiagonalterme resultieren aus den Termen, wo Anteile benachbarter KV enthalten sind. Die Sortierung der Matrix orientiert sich an der Netztopologie. Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  hat die Größe  $[m \times m]$ , wobei  $m$  die

Anzahl an KV angibt. Durch die Approximation der Gradienten über die nächsten Nachbarn weist die Matrix eine dünnbesetzte Struktur der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \\ 0 & A_{32} & A_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & A_{mm} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \quad (2.29)$$

auf. Dieses lineare System kann mit Hilfe numerischer Verfahren effizient gelöst werden.

## 2.4.4 Unterrelaxation

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems 2.29 wird Unterrelaxation verwendet. Diese beschränkt die Änderung einer Variable über die Iterationsschritte und trägt damit zur Stabilisierung und Verbesserung der Konvergenzeigenschaften bei [26]. Unterrelaxation wird z.B. zum Lösen der Impulsgleichung verwendet.

Bei impliziter Unterrelaxation werden die Diagonalkoeffizienten der Matrix mit einem konstanten Faktor  $\frac{1}{\alpha}$  multipliziert. Dieser Faktor liegt zwischen den Grenzen  $0 < \alpha \leq 1$ . Der Quellterm aus der Unterrelaxation und der neue Eintrag in der Diagonalen ergeben sich nach

$$\mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^k := \underbrace{\frac{1}{\alpha} \mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^k}_{\text{Diagonalkoeffizient}} - \underbrace{\frac{1-\alpha}{\alpha} \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{u}_c^{k-1}}_{\text{Quellterm}}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^k \approx \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{u}_c^{k-1} \text{ bei Konvergenz.} \quad (2.31)$$

Der Index  $k$  bezeichnet den Iterationsschritt. In den Nebendiagonaleinträgen tritt keine Änderung durch die Unterrelaxation auf [54].

Implizite Unterrelaxation steigert die diagonale Dominanz der Lösungsmatrix. Die Auswahl des Parameters  $\alpha$  und die Abstimmung der einzelnen Faktoren zueinander ist problemspezifisch durchzuführen. Die Größe des erforderlichen Unterrelaxationsfaktors hängt u.a. von der Netzfeinheit, dem linearen Löser und den Diskretisierungsschemata ab [62].

## 2.5 Druck-Geschwindigkeitskopplung

Nun wird auf die Lösung der Impuls- und Kontinuitätsgleichung eingegangen. Bei kompressiblen Fluiden wird der Druck über Dichte und Temperatur mit Hilfe einer Zustandsgleichung berechnet. Dieser Zusammenhang ist bei inkompressiblen Fluiden durch die Impulsbilanz nicht gegeben. Zur Berechnung des Druckes bei inkompressiblen Strömungen wurden spezielle Verfahren entwickelt. Diese Verfahren sind auch als Druckkorrektur- oder Projektionsmethoden bekannt.

Bei Druckkorrekturverfahren wird zunächst mittels eines geschätzten Druckfeldes ein Geschwindigkeitsfeld aus den Impulsgleichungen bestimmt. Anschließend wird der Druck über eine Druckkorrekturgleichung berechnet. Bei dieser Art Verfahren handelt es sich um ein sequentielles Verfahren. Nach dem Druck und den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten wird entkoppelt gelöst. Eine Gleichung für die Druckkorrektur wird aus der Kontinuitäts- und Impulsgleichung abgeleitet. Aus der Divergenz der Impulsgleichung und dem Einsetzen der Massengleichung resultiert eine Poisson-Gleichung für die Druckkorrektur  $p'$

$$-\frac{1}{\rho}\Delta p' = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.32)$$

Da die Dichte und Viskosität konstant sind, sind keine viskosen und instationären Terme in der Druckkorrektur enthalten.

Die Strömungsgleichungen können nun durch einen iterativen Prozess zwischen Geschwindigkeits- und Druckfeld gelöst werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE) von Patankar [54] genutzt. Die Herleitung der Gleichungen orientiert sich dabei an Ferziger [26].

### 2.5.1 Das SIMPLE-Verfahren

Das SIMPLE-Verfahren ist zur Berechnung inkompressibler Strömungen entwickelt worden. Das Druckkorrektur-Verfahren ist in zwei Teilschritte zerlegt. Im ersten Schritt, dem Prediktorschritt, wird ein Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}^{k*}$  auf Basis des alten Druckfeldes  $p^{k-1*}$  über die Impulsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{k*}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{k*} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k*} - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}^{k*}) = -\nabla p^{k-1*} \quad (2.33)$$

berechnet. Im zweiten Schritt, dem Korrektor-Schritt, wird nach der Druckkorrektur  $p^{k'}$  über

$$-\frac{1}{\rho}\Delta p^{k'} = \nabla \cdot (\mathbf{u}^{k*} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k*} \quad (2.34)$$

gelöst und anschließend die Geschwindigkeit mit Hilfe des Druckterms  $p^{k'}$  korrigiert.

Um innerhalb des SIMPLE-Verfahrens nach den Variablen entkoppelt zu lösen, sind bestimmte Vereinfachungen getroffen worden. Nachfolgend wird daher der Ablauf detailliert skizziert. Bei dem SIMPLE-Verfahren wird nicht direkt nach den Feldern gelöst, sondern zunächst Schätzwerte berechnet. Die Geschwindigkeitsschätzung wird durch das Druckkorrekturfeld im zweiten Schritt angepasst. Das Geschwindigkeits- und Druckfeld werden als Summe eines geschätzten Wertes  $()^*$  und einer Korrektur  $()'$  dargestellt

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k*} + \mathbf{u}^{k'}, \quad (2.35)$$

$$p^k = p^{k-1*} + p^{k'}, \quad (2.36)$$

wo der Index  $k$  die Iteration angibt, an der die Variable berechnet wurde.

Die Impuls- und Druckkorrekturgleichung sind in den Einträgen der linearen Lösungsmatrix  $\mathbf{A}$  zu sehen. Im Prediktorschritt wird die Änderung im Druck  $\nabla p^{k-1*}$  als Quellterm auf der rechten Seite des linearen Lösungssystems eingebracht. Die Lösungsmatrix setzt sich zusammen aus diagonalen Einträgen  $()_c$  und den nicht-diagonalen Einträgen  $()_l$ . Die Diagonalwerte stammen aus Diskretisierungswerten am jeweiligen KV. Die Nebendiagonalwerte ergeben sich aus der Diskretisierung der Flüsse. Die Anteile der Diskretisierung aus einem alten Iterationsschritt sind in dem Quellterm  $\mathbf{Q}$  auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems enthalten. Dazu gehören die Anteile der Flüsse aus der Picard-Linearisierung. Das System im Prediktor-Schritt in semi-diskretisierter Form ergibt sich über

$$\underbrace{\mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^{k*}}_{\text{Hauptdiagonaleinträge}} + \underbrace{\sum_l \mathbf{A}_l^k \mathbf{u}_l^{k*}}_{\text{Nebendiagonaleinträge}} = \underbrace{\mathbf{Q}(\mathbf{u}^{k-1})}_{\text{Quellterm}} - \underbrace{\nabla p_c^{k-1*}}_{\text{Druckgradient}} \quad (2.37)$$

Durch Lösung der Gleichung 2.37 nach  $\mathbf{u}^{k*}$  ergibt sich eine erste Schätzung für das Geschwindigkeitsfeld. Das berechnete Geschwindigkeitsfeld erfüllt noch nicht die Kontinuitätsgleichung, da es durch Verwendung des Druckfeldes aus der alten Iteration zu einem Massendefekt kommt.

Die Gleichung für die Druckkorrektur ergibt sich aus der Betrachtung der Impulsgleichung bei bekannten Druck- und Geschwindigkeitsfeld zur Iteration  $k$

$$\mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^k + \sum_l \mathbf{A}_l^k \mathbf{u}_l^k = \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{k-1}) - \nabla p_c^k. \quad (2.38)$$

Aus der Subtraktion von Gleichung 2.38 und Gleichung 2.37 resultiert ein Ausdruck für die Geschwindigkeitskorrektur  $\mathbf{u}_c^{k'}$

$$\mathbf{u}_c^{k'} = - \underbrace{\frac{\sum_l \mathbf{A}_l^k \mathbf{u}_l^{k'}}{\mathbf{A}_c^k}}_{\tilde{\mathbf{u}}_c^{k'}} - \frac{1}{\mathbf{A}_c^k} \left( \nabla p_c^{k'} \right). \quad (2.39)$$

Die Kontinuitätsgleichung für Schätzwert und Korrektur hat die Form

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}^{k*}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}^{k'}) = 0. \quad (2.40)$$

Die Divergenz von dem geschätzten Geschwindigkeitsfeld und der Geschwindigkeitskorrektur müssen dabei Null ergeben. Durch Einsetzen von Gleichung 2.39 in die Kontinuitätsgleichung resultiert eine Gleichung für die Druckkorrektur

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}^{k*}) = \cancel{\nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{u}}_c^{k'})} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mathbf{A}_c^k} (\nabla p_c^{k'}) \right). \quad (2.41)$$

Da das Feld  $\tilde{\mathbf{u}}_c^{k'}$  nicht bekannt ist, wird es vernachlässigt [26]. Anschließend wird die Geschwindigkeit nach Gleichung 2.35 korrigiert. Die Kontinuitätsbedingung ist nicht mehr verletzt. Es ergibt sich allerdings ein Fehler in der Impulsgleichung. Daher wird eine neue Iterationsschleife mit den korrigierten Feldern gestartet. Diese Berechnungsschleife wird durchgeführt, bis der Fehler in der Kontinuitäts- und Impulsgleichung ein vorgegebenes Residuum unterschritten hat.

Abschließend sind noch einmal die einzelnen Berechnungsschritte im Druckkorrektur-Algorithmus zusammengefasst:

#### 1. Prediktor-Schritt

- a) Druckfeld aus vorhergehender Iteration wird als Anfangsschätzer  $p^{k-1*}$  genutzt
- b) Aufstellen und Berechnung eines geschätzten Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}^{k*}$  nach Gleichung 2.37

#### 2. Korrektor-Schritt

- a) Aufstellen und Lösen der Poisson-Gleichung um Druckkorrektur  $p^{k'}$  zu berechnen nach Gleichung 2.41
- b) Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes nach Gleichung 2.35 und 2.39
- c) das korrigierte Druckfeld  $p^{k'}$  und der Druckschätzer  $p^{k-1*}$  werden zum neuen Druckfeld  $p^k$  und für den nächsten Iterationsschritt als Schätzwert genutzt

#### 3. Weitere Schritte



- a) Berechnung anderer Transportgrößen, z.B. Turbulenzgrößen
- b) Gehe zu 1) und wiederhole Iterationsschritte bis vorgegebenes Toleranzkriterium unterschritten wird

Dieser Algorithmus ist unter der Bezeichnung SIMPLE bekannt. Innerhalb der Familie der Simple-artigen Verfahren gibt es verschiedene Anpassungen des Algorithmus, um ein stabileres Verhalten und eine schnellere Konvergenz zu erzielen. Die bekanntesten Adaptionen sind z.B. SIMPLER, SIMPLEC und SIMPLEX. Für ausführliche Informationen zu den Adaptionen und den jeweiligen Vor- und Nachteilen sei auf Zeng und Tao [73] verwiesen.

Abschließend wird noch auf die Besonderheiten von Druckkorrektur-Verfahren in Zusammenhang mit instationären Strömungen eingegangen. Bei der Lösung instationärer Probleme werden die eigentlichen physikalischen Zeitschritte als äußere Iterationen bezeichnet. Innerhalb jeder äußeren Iteration finden mehrere Schleifen über den Prediktor- und den Korrektor-Schritt statt. Innerhalb der Prediktor- bzw. Korrektorschleife werden die Impuls- bzw. Poisson-Gleichung mit Hilfe eines linearen Löser gelöst. Insgesamt ergeben sich daher bei instationären Rechnungen drei Schleifen: die äußere Schleife, in der der physikalische Zeitschritt iteriert wird, die Prediktor-Korrektor-Schleife zur Lösung der Druck-Geschwindigkeitskopplung und die Schleife der linearen Löser jeweils für die Impuls- und Druckkorrekturgleichung.

Der physikalische Zeitschritt der äußeren Schleife ist abhängig von der Komplexität des Berechnungsfalls und der Diskretisierung der Zeitableitung. Die Anzahl der Prediktor-Korrektor-Schleifen richtet sich nach der geforderten Genauigkeit pro Zeitschritt. Bei höheren Genauigkeitsanforderungen sind mehr Iterationen notwendig. Die Erhöhung der Iterationen geht zu Lasten der Rechenzeit. Die Anzahl der Prediktor-Korrektor-Schritte wird über eine zuvor definierte Toleranz gesteuert. Die Schleifen werden abgebrochen, wenn z.B. das Residuum von Druck- und Geschwindigkeitsfeld des alten und des neuen Iterationsschrittes unterhalb eines Wertes von  $1e-6$  liegen. Die Anzahl der Schleifen der linearen Löser ist abhängig vom Löser und der gewählten Toleranz des Löser. Zur Lösung der Poisson-Gleichung wird innerhalb dieser Arbeit ein Multigrid-Löser mit Toleranz  $1e-6$  gewählt. Die Impulsgleichungen werden über einen Gauß-Seidel-Löser bis zu einer Toleranz von  $1e-6$  gelöst.

Anschaulich ist der Lösungsablauf bei instationären Problemen in Abbildung 2.2 illustriert. Zur Zeit  $t_1$  werden zwei Prediktor-Korrektor-Schritte durchgeführt. Innerhalb des Prediktorschrittes, gekennzeichnet mit einem grünen P, findet eine lineare Löser-Schleife statt. In dem Korrektorschritt, hier über ein grünes K gekennzeichnet, findet ebenfalls eine lineare Löser-Schleife statt. Nachdem alle Prediktor-Korrektor-Schritte abgeschlossen sind, wird nach zusätzlichen Transportgrößen, z.B. Turbulenz, gelöst. Zu jedem Zeitschritt werden die Impuls- und Poisson-Gleichung mehrfach gelöst, die Transportgleichungen jedoch nur einmal. Anschließend schreitet

die physikalische Zeit um die Zeitschrittweite  $\Delta t = t_2 - t_1$  voran. Erneut werden Prediktor-Korrektor- und lineare Löser-Schleifen durchgeführt.

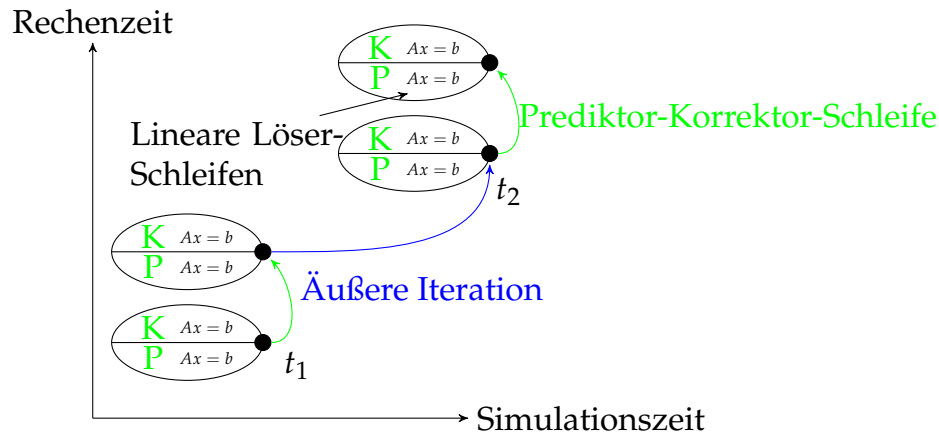


Abbildung 2.2: Iterativer Ablauf von Zeitschrittverfahren innerhalb eines Druckkorrektur-Verfahrens

## 2.6 Randbedingungen

Nachdem nun alle Gleichungen und Diskretisierungen skizziert wurden, müssen Randbedingungen gesetzt werden.

Randbedingungen werden getrennt in Neumann, Dirichlet und gemischte Randbedingungen. Bei Dirichlet-Randbedingungen ist direkt der Wert der Variable  $\phi$  auf dem spezifischen Rand vorgegeben, während bei Neumann-Randbedingungen der Gradient der Variable in Normalenrichtung der Wand gegeben ist. Bei gemischten Randbedingungen handelt es sich um eine Kombination von Neumann und Dirichlet [26].

- Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

- Dirichlet-Randbedingungen:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad (2.43)$$

Das Strömungsgebiet weist meist einen Einström- und Ausströmrand und Wände auf. Typische Randbedingungen für den Einströmrand sind

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = 0. \quad (2.45)$$

Das Fluid strömt mit einer festen oder auch zeitlich-veränderlichen Geschwindigkeit über den Einströmrand ein. Der Druckgradient in Normalenrichtung des Einströmrandes ist zu Null gesetzt. Am Auströmrand wird meist ein fester Druck und ein Geschwindigkeitsgradient angegeben

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0. \quad (2.47)$$

Bei turbulenten Strömungen werden zusätzlich zur Geschwindigkeit auch die Turbulenzgrößen am Einströmrand gesetzt. Je nach Turbulenzmodell sind unterschiedliche Turbulenzvariablen zu setzen. Bei dem SA-Modell erfolgt eine Abschätzung der turbulenten Viskosität über das Verhältnis von Wirbelviskosität zu molekularer Viskosität.

Da an festen Wänden die Haftbedingung gilt, ist die Geschwindigkeit an der Wand Null. Der Druck wird über eine Null-Gradienten-Randbedingung berechnet

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = 0. \quad (2.49)$$

Feste Wände werden außerdem als hydraulisch glatt angenommen, sodass keine zusätzlichen Gleichungen zur Modellierung der Rauigkeit eingebunden werden müssen. Bei Berechnungen mit bewegten Wänden werden die Geschwindigkeiten an den bewegten Rändern aus den Netzflüssen berechnet. Die Turbulenz an der Wand wird wie in Abschnitt 2.3 beschrieben entweder über Low- $Re$ -Modelle oder Wandfunktionen abgebildet.

---

## 3 Modellierung zeitlich periodischer Systeme

In diesem Kapitel werden zeitspektrale Methoden vorgestellt. Nach einer kurzen Einführung zum Thema werden die Time Linearized Frequency Domain Method und die Time Spectral Method erläutert. Ausgehend von den semidiskretisierten, instationären Navier-Stokes-Gleichungen werden die zeitspektralen Gleichungen hergeleitet. Im Rahmen dieser Arbeit wird die nichtlineare zeitspektrale Methode gewählt. Für diese Methode wird auch die ALE-Formulierung erklärt. Das Kapitel schließt ab mit einer Untersuchung der Unterschiede zwischen dem gewählten zeitspektralen Verfahren und dem instationären Zeitschrittverfahren.

### 3.1 Lineare und nichtlineare zeitspektrale Verfahren

#### 3.1.1 Time Linearized Frequency Domain Method

Zur instationären Berechnung von Turbomaschinenströmungen wird neben den bekannten Zeitschrittverfahren auch die Time Linearized Frequency Domain Method (TLFDM), auch bekannt als Linearized Frequency Domain Method (LFD), verwendet. Dabei handelt es sich um einen linearisierten Ansatz in der Zeit. Die ersten Arbeiten zur Linearisierung instationärer Strömungen sind auf Whitehead [71] zurückzuführen. Gegenstand der Arbeit war die Analyse einer Plattenströmung. Die Strömung ist dabei unterteilt in einen stationären Anteil und eine Störungsgleichung. Die Lösung erfolgt semi-analytisch.

Voraussetzung für die Nutzung der Methode sind zeitlich periodische Strömungen, wo die Amplitude der Störung im Vergleich zur stationären Hauptströmung klein ist. Außerdem sollte kein Energieaustausch zwischen einzelnen Moden auftreten. Die Methode wird unter anderem zur Berechnung von Flattern, erzwungenen Schwingungen und bei Flügelprofilen genutzt und ist bei geringen Mach-Zahlen und kleinen Anströmwinkeln auch für die Berechnung der Widerstandskoeffizienten eines Gesamtflugzeuges geeignet [20]. Bei der TLFDM werden die Strömungsgrößen  $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$  in einen stationären Anteil  $\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$  und eine überlagerte Störung  $\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{x})e^{in2\pi ft}$  zerlegt. Die Störung wird als verkürztes zeitliches Fourier-Poly-

nom mit nur einer Grundfrequenz  $f$  approximiert. Die Strömungsgrößen ergeben sich daher zu

$$\mathbf{W}(t) = \tilde{\mathbf{W}} + \hat{\mathbf{W}}e^{in2\pi ft}, \quad (3.1)$$

die Netzposition  $\mathbf{x}$  und die Netzgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_{\text{Netz}}$  werden analog zerlegt in

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}e^{in2\pi ft}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{u}_{\text{Netz}} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{Netz}}e^{in2\pi ft}, \quad (3.3)$$

wo  $i$  die imaginäre Einheit angibt und  $n$  die Anzahl an Harmonischen. Die Netzgeschwindigkeit hat keinen stationären Anteil. Für die TLFDm werden nur die nullte ( $n = 0$ ) und erste Ordnung ( $n = 1$ ) betrachtet.

Es wird angenommen, dass die Störungen im Vergleich zur stationären Strömung gering sind. Ausgehend von der semidiskretisierten Form der Erhaltungsgleichung

$$V \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{R}(\mathbf{W}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (3.4)$$

wo der Residuenterm mit  $\mathbf{R}(\mathbf{W}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  gegeben ist, werden die Terme nullter und erster Ordnung gesammelt. Die Terme nullter Ordnung ergeben die stationären Navier-Stokes-Gleichungen. Über den Zusammenhang  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{Netz}} = in2\pi f \hat{\mathbf{x}}$  resultieren die Terme erster Ordnung in einem System

$$\left( i2\pi f \mathbf{I}V + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} \right) \hat{\mathbf{W}} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} - i2\pi f \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}_{\text{Netz}}} \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.5)$$

Es wird angenommen, dass die Volumen  $V$  der KV in der Zeit konstant sind. Bei  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{W}}}$  handelt es sich um die stationäre Jacobi-Matrix.

Durch Abbruch der Fourier-Polynome nach dem ersten Grad ergibt sich ein komplexes Gleichungssystem. Dieses muss nur für die Fourier-Koeffizienten nullter ( $n = 0$ ) und erster ( $n = 1$ ) Ordnung gelöst werden. Es wird entweder direkt mit komplexer Arithmetik gerechnet oder die Lösung erfolgt über ein gekoppeltes System. Bei Aufspaltung von Real- und Imaginärteil  $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}}_{\text{Re}} + i\hat{\mathbf{W}}_{\text{Im}}$  entsteht ein blockgekoppeltes System

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} & -n2\pi f \mathbf{I}V \\ n2\pi f \mathbf{I}V & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{W}}_{\text{Re}} \\ \hat{\mathbf{W}}_{\text{Im}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{Re}} + 2\pi f \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}_{\text{Netz}}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{Im}} \\ -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{Im}} - 2\pi f \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}_{\text{Netz}}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{Re}} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

wo  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix,  $\text{Re}$  und  $\text{Im}$  die Real- bzw. Imaginärteile und  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{W}}}$  die Jacobi-Matrix sind. Die TLFDm bietet einige Vorteile zu den herkömmlichen Zeitschrittverfahren. Es können stationäre Methoden wie Multigrid und lokale Zeitschritte zur Beschleunigung des Lösungsverfahrens verwendet werden [23]. Die Linearisierung in der Zeit ist jedoch auch mit Einschränkungen verbunden, so können Effekte wie

Sekundärströmungen und stärkere Verdichtungsstöße nicht ohne weiteres abgebildet werden [33], da hier höhere Frequenzanteile auftreten.

### 3.1.2 Time Spectral Method

Die Beschränkung der TLFDM auf lineare Effekte führte zur Entwicklung der Harmonic Balance Method (HBM) von Hall, Thomas und Clark [32] und deren Weiterentwicklung zur Time Spectral Method (TSM) durch McMullen [47] und Gopinath [29]. Bei diesen Verfahren werden die instationären Gleichungen durch Fourier-Transformation in ein System periodischer, gekoppelter Gleichungen überführt. Die Kopplung erfolgt durch einen zeitspektralen Operator. Während der zeitspektrale Operator bei der HBM aus den Transformationsmatrizen besteht, wird im Rahmen der TSM eine explizite Formel hergeleitet.

Nachfolgend werden die Gleichungen der TSM erläutert. Die Herleitung orientiert sich an Mundis und Mavriplis [51] und startet auf Basis der semidiskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen 3.4. Für die Herleitung wird angenommen, dass die KV über der Zeit konstant sind. Die Betrachtung für instationäre Netze erfolgt in Abschnitt 3.2.

Zeitliche Periodizität setzt voraus, dass sich die Werte der Strömungsvariablen nach einer festen Periodendauer  $T$  wiederholen

$$\mathbf{W}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{W}(x_1, x_2, x_3, t + T). \quad (3.7)$$

Bei Turbomaschinen ergibt sich beispielsweise die Periodendauer zu  $T = \frac{1}{f}$ , wobei  $f$  die Frequenz der Maschine ist.

Die Fouriertransformierten der Strömungsgrößen und des Residuenters sind gegeben mit

$$\hat{\mathbf{W}}_m = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} \mathbf{W}_n e^{-im2\pi fn\Delta t}, \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_m = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} \mathbf{R}_n e^{-im2\pi fn\Delta t}, \quad (3.9)$$

wo  $m$  die Wellenzahl bezeichnet. Jede Wellenzahl korrespondiert mit einer Frequenz  $f_m = mf$ . Die Kollokationspunkte werden mit  $n$  gekennzeichnet. Die Grundfrequenz des Problems ist durch  $f$  gegeben. Es werden mehrere Vielfache der Grundfrequenz aufgelöst. Diese Vielfachen werden auch als Harmonische  $N$  bezeichnet. McMullen [47] führt an, dass die meisten Strömungen mit einer geringen Anzahl Harmonischer abgebildet werden können. Daraus folgt, dass die Fourier-Reihe als zeitliche Ansatzfunktion der Strömungsgrößen nach  $N$  Frequenzen abgebrochen

werden kann. Dies entspricht  $2N + 1$  Kollokationspunkten im Zeitraum. Die Rücktransformation erfolgt analog

$$\mathbf{W}_n = \sum_{m=-N}^N \hat{\mathbf{W}}_m e^{im2\pi f_n \Delta t}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{R}_n = \sum_{m=-N}^N \hat{\mathbf{R}}_m e^{im2\pi f_n \Delta t}, \quad (3.11)$$

wobei die Strömungsgrößen und Residuenten an  $2N + 1$  Kollokationspunkten berechnet werden. In den Gleichungen ist  $\Delta t = \frac{T}{2N+1}$  die Länge eines Zeitschrittes. In Matrixschreibweise wird die Transformation in den Frequenzraum über die Matrix  $\boldsymbol{\zeta}$  und die Rücktransformation in den Zeitraum über  $\boldsymbol{\zeta}^{-1}$  dargestellt

$$\hat{\mathbf{W}}_m = \boldsymbol{\zeta} \mathbf{W}_n \text{ und } \mathbf{W}_n = \boldsymbol{\zeta}^{-1} \hat{\mathbf{W}}_m. \quad (3.12)$$

Die Beziehungen 3.10 und 3.11 werden in die semidiskretisierten Gleichungen 3.4 eingesetzt. Das System

$$\sum_{m=-N}^N (im2\pi f_n V \hat{\mathbf{W}}_m + \hat{\mathbf{R}}_m(\hat{\mathbf{W}}_m)) e^{im2\pi f_n \Delta t} = 0 \quad (3.13)$$

bildet eine orthogonale Basis, daher muss für jede Frequenz  $f_m$  die Gleichung

$$i2\pi f_m n V \hat{\mathbf{W}}_m + \hat{\mathbf{R}}_m(\hat{\mathbf{W}}_m) = 0 \quad (3.14)$$

erfüllt sein.

Die Lösung der Gleichungssysteme 3.14 ist mit hohem numerischen Aufwand verbunden, da eine Multiplikation im Zeitraum zu einer Faltung im Frequenzraum transformiert wird. Die Berechnung des Residuenten im Frequenzraum führt daher zu einer kubischen Komplexität  $\mathcal{O}(N^3)$ . Außerdem ist die Formulierung der Turbulenzgleichungen im Frequenzraum nur für einfache Modelle bekannt [32]. Daher werden die Gleichungen nach Hall, Thomas und Clark [32] mit Hilfe der Transformationsmatrizen aus Gleichung 3.12 zurück in den Zeitraum transformiert. Das Gleichungssystem im Zeitraum ergibt sich daher zu

$$\boldsymbol{\zeta}^{-1} i2\pi f_m n \mathbf{I} \boldsymbol{\zeta} V \mathbf{W}_n + \boldsymbol{\zeta}^{-1} \boldsymbol{\zeta} \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n) = 0. \quad (3.15)$$

Durch die Transformation ergibt sich eine zeitliche Kopplung aller Kollokationspunkte. Der zeitspektrale Operator  $\mathbf{D}_n = \boldsymbol{\zeta}^{-1} i2\pi f_m n \mathbf{I} \boldsymbol{\zeta}$  fasst die Transformationsmatrizen zusammen. An jedem Kollokationspunkt  $n$  ergibt sich ein System der Form

$$V \underbrace{\sum_{m=-N}^N d_m \mathbf{W}_{n+m}}_{\mathbf{D}_n(\mathbf{W})} + \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n) = 0. \quad (3.16)$$

Insgesamt resultieren  $2N + 1$  periodische Gleichungssysteme, die über den zeitspektralen Operator  $\mathbf{D}_n$  gekoppelt sind. Die Koeffizienten werden an  $2N + 1$  gleichmäßig verteilten Kollokationspunkten innerhalb der Periode  $T$  berechnet. Dank der Rücktransformation in den Zeitraum können die Flüsse an jedem Kollokationspunkt mit bekannten Schemata berechnet werden.

Gopinath [29] und McMullen [47] leiten einen analytischen Ausdruck für den zeitspektralen Operator her. Für eine ungerade Anzahl an Zeitleveln innerhalb einer Periode ergibt sich der Kopplungsterm zu

$$\mathbf{D}_n(\mathbf{W}) = \sum_{m=-N}^N d_m \mathbf{W}_{n+m}, \quad (3.17)$$

$$d_m = \begin{cases} \frac{\pi}{T} (-1)^{m+1} \frac{1}{\sin(\frac{\pi m}{2N+1})}, & \text{für } m \neq 0 \\ 0, & \text{für } m = 0 \end{cases}, \quad (3.18)$$

und für eine gerade Anzahl von Zeitintervallen zu

$$d_m = \begin{cases} \frac{\pi}{T} (-1)^{m+1} \cot(\frac{\pi m}{2N+1}), & \text{für } m \neq 0 \\ 0, & \text{für } m = 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

Das Prinzip der TSM soll anhand eines Beispiels noch einmal verdeutlicht werden. Zur anschaulichen Darstellung dient Abbildung 3.1. Hier ist der Verlauf einer Funktion über der Zeit zu sehen. Die  $2N + 1$  Fourier-Koeffizienten werden mit Hilfe von  $2N + 1$  äquidistant verteilten Kollokationspunkten innerhalb einer Periode ausgewertet. Diese Kollokationspunkte entsprechen einzelnen Zeitpunkten. Hier ist beispielhaft für  $N = 2$  die Verteilung der Kollokationspunkte innerhalb einer Periode zu sehen. Für jeden Punkt wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt. Die Systeme sind miteinander über den zeitspektralen Operator gekoppelt. So fließen zur Berechnung des Strömungsfeldes zum Zeitpunkt  $t_2$  auch die Felder der Zeiten  $[t_0; t_1; t_3; t_4]$  über den zeitspektralen Operator in das lineare Gleichungssystem mit ein.

Numerisch wird zur Lösung des Gleichungssystems 3.16 oftmals ein künstlicher Zeitterm  $\frac{\partial \mathbf{W}_n}{\partial \tau}$  in das System integriert und das System in der künstlichen Zeit  $\tau$  kon-



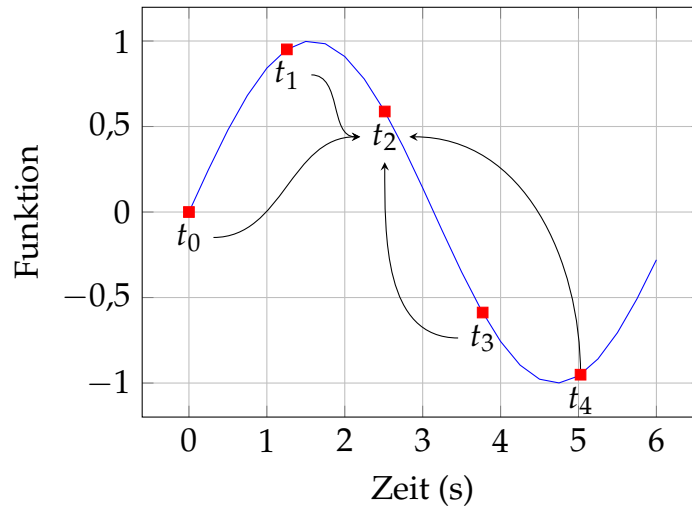


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Verteilung der Kollokationspunkte für  $N = 2$  bei der TSM

vergiert. Das Gleichungssystem mit Pseudozeit an einem Kollokationspunkt ergibt sich zu

$$\frac{\partial \mathbf{W}_n}{\partial \tau} + V \mathbf{D}_n(\mathbf{W}) + \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n) = 0. \quad (3.20)$$

Neben der Pseudozeit wird auch Unterrelaxation verwendet, um das System zu konvergieren. Beide Verfahren beschränken die Änderungen in den Variablen über die Zeit- bzw. Iterationsschritte. Bei Verwendung von Unterrelaxation werden die Diagonalterme der Matrix mit einem konstanten Faktor  $\frac{1}{\alpha}$  multipliziert. Während der Pseudozeitterm sich additiv auf die Diagonalkoeffizienten der Lösungsmatrix auswirkt, wirkt Unterrelaxation multiplikativ.

## 3.2 Erweiterung der zeitspektralen Methode auf bewegte Geometrien

Die Herleitung der TSM in Kapitel 3.1.2 erfolgte unter der Annahme zeitlich konstanter KV. Bei instationären Strömungsvorgängen kommt es jedoch oftmals zu großen Verformungen im Rechengebiet. Diese Bewegung muss in den Erhaltungsgleichungen entsprechend berücksichtigt werden. Dazu sind aus der Kinematik zwei unterschiedliche Formulierungen der Bewegung bekannt [22]:

- Lagrange-Betrachtungsweise
- Euler-Betrachtungsweise

Bei der Lagrange-Betrachtungsweise folgen die Netzknoten der Bewegung der Materieteilchen. Diese Art der kinematischen Betrachtung kommt meist im Bereich der Kontinuumsmechanik zum Einsatz. In der Fluidmechanik wird der Euler-Ansatz bevorzugt. Das Koordinatensystem und die Netzknoten sind ortsfest. Eine Kombination beider Ansätze ist die Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methode (ALE). Die Netzknoten können unabhängig von der Bewegung der Materieteilchen versetzt werden. Über diesen Ansatz ist es möglich, Bewegung der Ränder umzusetzen und in den Erhaltungsgleichungen zu berücksichtigen.

Durch die ALE ergeben sich Änderungen in den Erhaltungsgleichungen. Die Bewegung des Netzes ist unabhängig von der Bewegung der Fluidteilchen. Die Netzgeschwindigkeit kann auf das Inertialsystem bezogen berechnet werden. Es ergibt sich eine konvektive, relative Geschwindigkeit  $\mathbf{c} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{Netz}}$ . Diese relative Geschwindigkeit ist die Differenz aus der Fluidgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und der Netzgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_{\text{Netz}}$ . Die Erhaltungsgleichungen in ALE-Form ergeben sich zu

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) d\Omega = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{c} \otimes \mathbf{u}) + p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{S}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right). \quad (3.24)$$

Aus der Bewegung der Ränder resultiert auch eine Bewegung der KV. Die Volumen  $V(t)$  der KV sind Funktionen der Zeit. Aus der Veränderung der Volumina ergeben sich zusätzliche Netzflüsse. Zu der Erhaltung der Masse und des Impulses kommt daher die Erhaltung des Volumens hinzu. Diese Erhaltungsgleichung wird auch Volumenerhaltungsgesetz, geometric conservation law, genannt [42]. Eine Vielzahl unterschiedlicher Bewegungen der Ränder sind denkbar. Um die Netzqualität zu erhalten, müssen die inneren Knoten bei gleichbleibender Netztopologie auf Basis der Verschiebungen der äußeren Ränder ebenfalls bewegt werden. Unterschiedliche Verfahren, um dies umzusetzen, sind bekannt. Laplace-Verfahren [39] und Verfahren, bei denen die Netze mit einer algebraischen Funktion generiert werden, werden nachfolgend kurz vorgestellt.

Bei dem zweiten Verfahren ist die globale Netzbewegungsfunktion bekannt. Die Position und Geschwindigkeit der einzelnen Netzknoten können exakt aus der globalen Funktion berechnet werden. Als Beispiel ist hier die Starrkörperbewegung, auch Solid Body Motion (SBM), zu nennen. Bei der Starrkörperbewegung werden alle Netzknoten mit einer konstanten Transformationsmatrix multipliziert. Die Topologie des Netzes bleibt erhalten. Dies wird z.B. bei oszillierenden Flügelprofilen oder rotierenden Körpern verwendet.

Bei dem Laplace-Verfahren wird nach der Position der KV unter Vorgabe der Bewegung der Ränder gelöst. Dazu wird die Laplace-Gleichung genutzt. Um die Dichte der Netzknoten zu steuern, wird mit einem richtungsorientierten Diffusions-Koeffizientenfeld gearbeitet [43]. Das Diffusions-Koeffizientenfeld erlaubt eine Erhaltung hoher Netzgüten im Bereich der Ränder auch bei komplexen Bewegungen.

Die Unterschiede beider Verfahren werden anschaulich an einem einfachen Beispiel dargestellt. Die Oszillation eines NACA0012-Profiles wird sowohl über das Laplace- wie auch das SBM-Verfahren berechnet. Beide Netze sind im Vergleich zum Ausgangsnetz in Abbildung 3.2 zu sehen. Der äußere Gebietsrand ist bei dem Laplace-Verfahren als zeitlich konstant vorgegeben, sodass sich die größten Verschiebungen am Profil befinden. Beim SBM-Verfahren wird das gesamte Netz basierend auf einer vorgegebenen Bewegungsfunktion transformiert. Die größten Verschiebungen ergeben sich am Rand des Berechnungsgebietes.

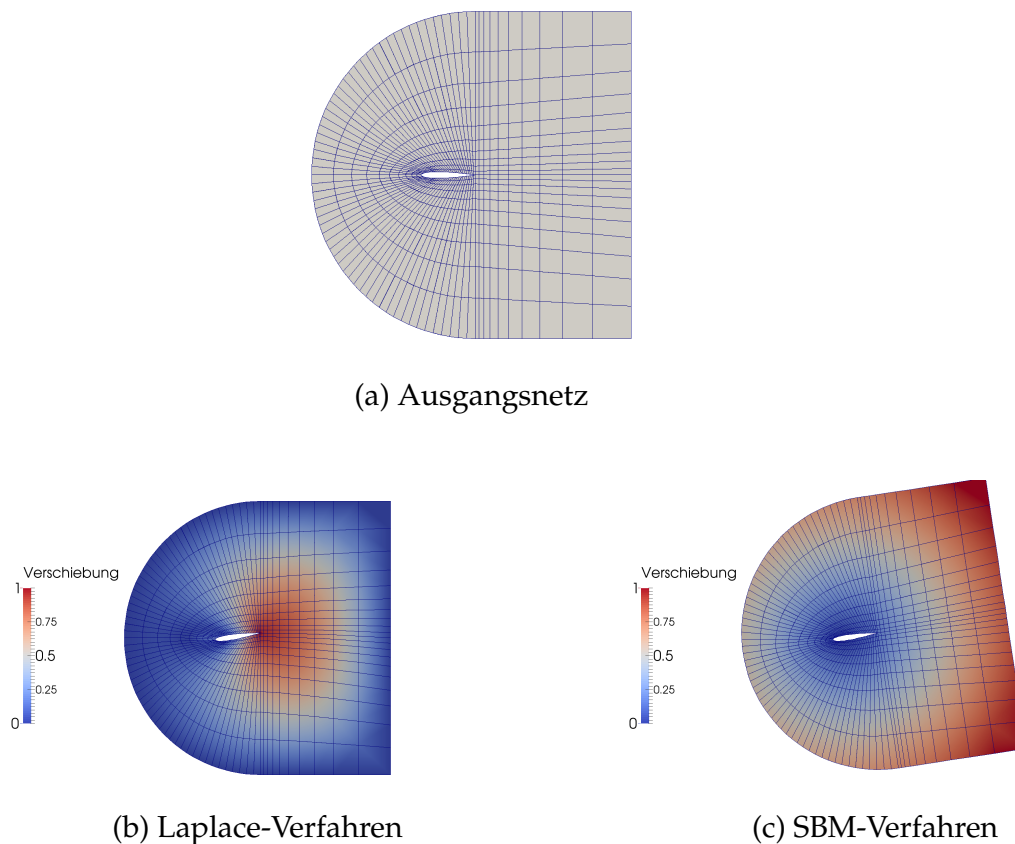


Abbildung 3.2: Verschiebung des Netzes mit dem Laplace- und dem SBM-Verfahren  
koloriert in relativer Zellverschiebung

Während sich beim SBM-Verfahren nur die Position der KV in der Zeit ändern, sind beim Laplace-Verfahren auch die Volumen der KV zeitabhängig. Die dynamisch verformbaren KV müssen auch bei der Formulierung des konvektiven Terms berücksichtigt werden. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  im konvektiven Term wird durch die relative Geschwindigkeit  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{Netz}}$  ersetzt. Die Formulierung der Netzgeschwindigkeit wird aus dem Volumenerhaltungsgesetz abgeleitet. Die Änderungen der Volumen in der Zeit müssen über die Geschwindigkeit der Netzhänder in Normalenrichtung kompensiert werden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_{\text{Netz}} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega = 0. \quad (3.25)$$

Es gilt, dass durch die Netzbewegung keine zusätzlichen Massenquellen oder -senken im Gebiet erzeugt werden dürfen.

Dies führt auch zu Anpassungen im zeitspektralen Operator bei dynamischen Netzen. Die Netze für die unterschiedlichen Kollokationspunkte werden bei dem zeitspektralen Löser im Präprocessing entweder unter Verwendung von dem SBM- oder dem Laplace-Verfahren erzeugt. Die Volumen der KV an allen Kollokationspunkten sind daher bekannt und der zeitspektrale Operator wird über  $\mathbf{D}_n(VW)$  berechnet. Komplexer ist die Berechnung der Netzgeschwindigkeiten für den konvektiven Term.

Beim SBM-Verfahren sind die Netzgeschwindigkeiten gleich den Geschwindigkeiten der bewegten Oberfläche und können daher analytisch berechnet werden. Die Verwendung von der Laplace-Gleichung zur Lösung nach der Netzbewegung erfordert eine Approximation der Netzflüsse. Diese Approximation ergibt sich zu

$$\sum_{\partial\Omega} \mathbf{u}_{\text{Netz}} \cdot \mathbf{n} = \sum_{m=-N}^N d_m \partial V_{n+m}. \quad (3.26)$$

Die Netzgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_{\text{Netz}}$  eines KV ergibt sich über Integration der Geschwindigkeiten der KV-Oberflächen in Normalenrichtung. Da alle Volumen der KV an den einzelnen Kollokationspunkten bekannt sind, kann hier eine Approximation mit Hilfe des zeitspektralen Operators genutzt werden. Die Netzgeschwindigkeiten sind die Summe der überstrichenen Volumina  $\partial V$  des KV an den Kollokationspunkten  $m, n$  multipliziert mit dem zeitspektralen Faktor  $d_m$ . Um das überstrichene Volumen zu berechnen, werden die einzelnen Elementoberflächen trianguliert und die Netzflüsse für jedes Element über die triangulierten Flächen aufsummiert [26].

Für die TSM müssen daher für alle Kollokationspunkte die Positionen der Netzknoten vorliegen. Die Felder für die Netzbewegung werden innerhalb dieser Arbeit als Präprocessing-Schritt berechnet und sind während des Lösen der Impuls- und Poisson-Gleichung fest hinterlegt. Wenn bei instationären Rechnungen das Netz basierend auf Laplace-Verfahren bewegt wird, muss bei Zeitschrittverfahren innerhalb

jeder Zeitschrittschleife das Netz neu berechnet werden. Das Lösen nach den Netzknoten innerhalb der äußeren Iterationen entfällt bei der TSM.

### 3.3 Gegenüberstellung TSM und Zeitschrittverfahren

In diesem Abschnitt wird auf die Unterschiede zwischen Zeitschrittverfahren und TSM eingegangen. Dazu werden die Genauigkeit der Methoden und die Konvergenzeigenschaften der Lösungsalgorithmen gegenübergestellt. Zuerst wird die diagonale Dominanz des Systems zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften betrachtet, bevor anhand eines einfachen Beispiels die Eigenwerte analysiert werden. Ziel dieses Abschnittes ist es die Vor- und Nachteile der TSM herauszuarbeiten und die Besonderheiten bei der Implementierung der TSM aufzuzeigen.

#### 3.3.1 Genauigkeit der Zeitdiskretisierung

Bei ausreichend Kollokationspunkten hat die TSM eine höhere Genauigkeit als herkömmliche Zeitschrittverfahren für zeitlich periodische Probleme [65]. Dies soll im Folgenden anhand eines einfachen Beispiels demonstriert werden.

Die zeitliche Ableitung einer einfachen Sinus-Funktion wird mit der TSM und Zeitschrittverfahren angenähert und der analytischen Lösung gegenübergestellt. Als Zeitschrittverfahren wird die Rückwärts-Differenzen-Formel, auch Backward Differencing Formula (BDF), erster und zweiter Ordnung verwendet. Für dieses Beispiel wird  $f = \frac{1}{T}$  mit der Periodendauer  $T = 1$  s gesetzt. Die Ausgangsfunktion ist über

$$f(t) = \sin(2\pi ft) + 2 \cdot \sin(4\pi ft) \quad (3.27)$$

gegeben und die analytische Ableitung ergibt sich zu

$$f'(t) = 2\pi f \cdot \cos(2\pi ft) + 8\pi f \cdot \cos(4\pi ft). \quad (3.28)$$

In Abbildung 3.3 sind der genaue zeitliche Verlauf der analytischen Ableitung und die approximierten Verläufe zu sehen. Für die Approximationen werden die TSM mit zwei Harmonischen und BDF erster und zweiter Ordnung mit  $\Delta t = \frac{T}{25}$  s verwendet.

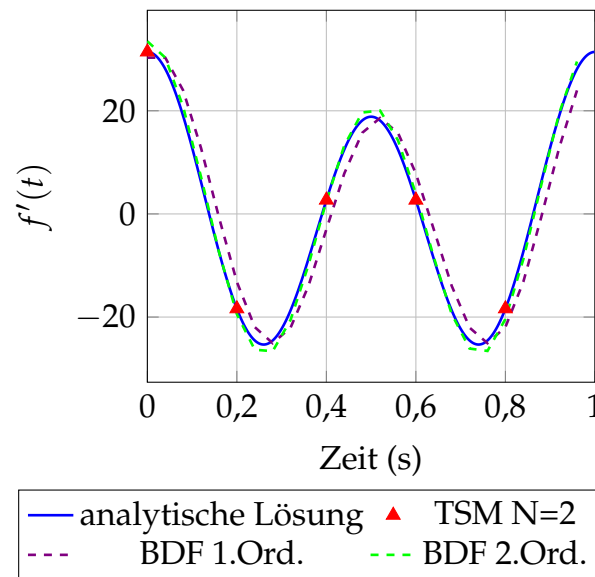


Abbildung 3.3: Gegenüberstellung der analytischen Lösung und der approximierten Lösungen mit den Diskretisierungsverfahren BDF 1. Ord., BDF 2. Ord. und TSM mit  $N = 2$

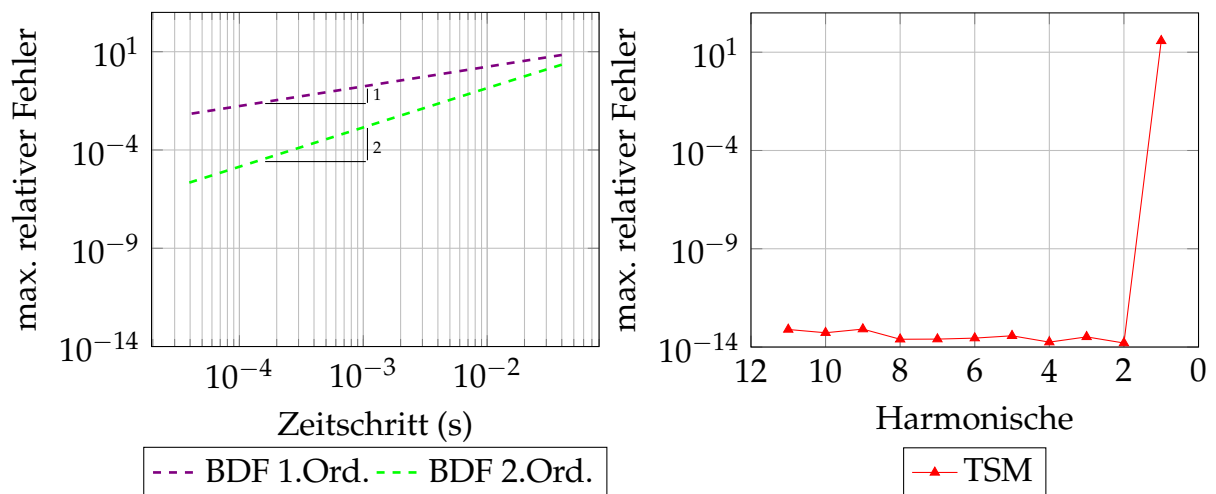


Abbildung 3.4: Links: Maximaler relativer Fehler der BDF aufgetragen über den Zeitschritt mit Steigung der Kurven; Rechts: Maximaler relativer Fehler der TSM aufgetragen über die Anzahl an Harmonischen

In Abbildung 3.4 wird auf der linken Seite der maximale relative Fehler zu der analytischen Lösung in Abhängigkeit des Zeitschrittes für BDF 1. Ord. und BDF 2. Ord. dargestellt und auf der rechten Seite wird der Fehler für die TSM mit 1 – 11 Harmonischen betrachtet.

Es zeigt sich bei der Approximation der zusammengesetzten Kosinus-Funktion mittels Zeitschrittverfahren erster Ordnung eine Phasenverschiebung gegenüber der analytischen Lösung. Die Ergebnisse der TSM mit zwei Harmonischen liegen exakt auf der realen Lösung. Bei Betrachtung des relativen Fehlers sind die Fehler aus der Berechnung mit der TSM bei ausreichend Harmonischen bis zu sechs Potenzen unterhalb der Zeitschrittverfahren. Da zwei Vielfache der Grundfrequenz in der Funktion vorkommen, müssen auch mindestens zwei Harmonische bei der TSM zur Approximation genutzt werden. Die relativen Fehler bei mehr als zwei Harmonischen liegen bereits innerhalb der Maschinengenauigkeit, daher können Rundungsfehlern auftreten. Im Gegensatz dazu sind die relativen Fehler der Zeitschrittverfahren auch mit reduziertem Zeitschritt höher als bei der TSM. Aus der Abbildung geht außerdem klar die Ordnung der Zeitschrittverfahren hervor.

Aus diesem Beispiel lässt sich ableiten, dass bei einer Gegenüberstellung von Zeitschrittverfahren und TSM auf den zeitlichen Fehler zu achten ist. Die zeitlichen Fehler müssen durch Untersuchungen unterschiedlicher Zeitschrittweiten eindeutig quantifiziert sein, sodass eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit TSM gewährleistet ist. Außerdem resultiert aus verringerten Zeitschritten eine erhöhte Rechenzeit. Bei Gegenüberstellung der Rechenzeiten von der TSM und Zeitschrittverfahren sollte daher immer die Zeitschrittweite und die erreichte Genauigkeit mit einbezogen werden. Die TSM weist auch nur dann eine höhere Genauigkeit auf, wenn ausreichend Harmonische zur Approximation des Problems verwendet werden. Die Anzahl der Harmonischen ist daher im Vorfeld zu prüfen. Die vorangegangenen Beobachtungen sind auf Basis eines periodischen Signals getroffen wurden. Die Schlussfolgerungen sind daher bei komplexen Strömungsproblemen detailliert zu prüfen.

### 3.3.2 Konvergenzeigenschaften einfacher iterativer Verfahren

Nachfolgend werden die Konvergenzeigenschaften eines linearen Prototypen-Systems untersucht. Diese Untersuchungen sollen globale Rückschlüsse auf die Konvergenzeigenschaften der entkoppelten, linearisierten Impulsgleichungen bei unterschiedlicher Zeitdiskretisierung zulassen. Zunächst wird daher eine kurze Einführung zur Thematik Konvergenz gegeben. Die nachfolgenden Zusammenhänge und Untersuchungen orientieren sich an den Ausführungen in Saad [62].

Zur Lösung des linearen Systems diskretisiert mit Zeitschrittverfahren und TSM werden iterative Löser, auch lineare Löser genannt, eingesetzt. Bei diesen wird ein System der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{Q} \tag{3.29}$$

gelöst. Der Lösungsvektor ist mit  $\mathbf{u}$ , die Diskretisierungsanteile aus alten Zeitschritten oder Iterationen sind in  $\mathbf{Q}$  und die Koeffizientenmatrix ist in  $\mathbf{A}$  gegeben. Bei

iterativen Verfahren wird die Inverse der Koeffizientenmatrix approximiert und damit eine Schätzung des Lösungsvektors berechnet. Über mehrere Iterationsschritte  $k$  wird die Inverse entsprechend angepasst mit dem Ziel das Residuum des linearen Systems  $\mathbf{Q} - \mathbf{A}^* \mathbf{u}$  zu reduzieren, wobei  $\mathbf{A}^*$  die Approximation der Inversen ist.

Die Einträge der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  unterscheiden sich bei Zeitschrittverfahren und TSM. Es ist zu beantworten, unter welchen Voraussetzungen und mit welcher Geschwindigkeit das iterative Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung der Gleichungssysteme konvergieren. Die Unterschiede zwischen zeitspektraler Formulierung und Zeitschrittverfahren sind von Interesse. Zur Beantwortung der ersten Frage, wird das Kriterium der diagonalen Dominanz herangezogen.

Nach Saad [62] konvergieren Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Anfangsschätzer  $\mathbf{u}_0$ , wenn die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  streng diagonal dominant oder irreduzibel diagonal dominant ist. Strenge diagonale Dominanz ist erfüllt, wenn die Summe der Beträge der Nebendiagonaleinträge  $|A_{lm}|$  kleiner ist als die Beträge der Hauptdiagonalen  $|A_{ll}|$

$$|A_{ll}| > \sum_{m \neq l} |A_{lm}|. \quad (3.30)$$

Wie schnell ein iteratives Verfahren konvergiert, richtet sich nach den Eigenwerten der Iterationsmatrix. Alle Eigenwerte  $\lambda$  einer Matrix werden auch als Spektrum  $\sigma(\mathbf{A})$  der Matrix bezeichnet. Der größte Eigenwert dieses Spektrums nennt sich spektraler Radius  $\rho(\mathbf{A})$

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|. \quad (3.31)$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit wird auch über den Konvergenzfaktor charakterisiert. Es gilt, dass der globale Konvergenzfaktor gleich dem spektralen Radius der Iterationsmatrix  $\mathbf{A}$  ist [62]. Bei kleineren Eigenwerten reduziert sich die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte, um einen vorher definierten Fehler  $\epsilon$  zu unterschreiten. Da die Berechnung des spektralen Radius aufwendig ist, werden zur Untersuchung häufig nicht die exakten Eigenwerte berechnet, sondern Schätzungen verwendet. Nach Gerschgorins Theorem [28] liegen alle Eigenwerte  $\lambda$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  in einem geschlossenen Kreis der komplexen Ebene zentriert bei  $A_{ii}$  mit dem Radius

$$\rho_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{j=m} |A_{ij}|. \quad (3.32)$$



Damit ist eine Abschätzung der Eigenwerte und somit ein Vergleich der Konvergenzraten von linearen Systemen diskretisiert mit TSM und Zeitschrittverfahren möglich.

### Diagonale Dominanz des linearen Systems diskretisiert mit Zeitschrittverfahren

In diesem Abschnitt wird für ein Prototypen-System die Bedingung der diagonalen Dominanz überprüft. Das System wird dazu mit Zeitschrittverfahren und TSM diskretisiert. Bei dem diskretisierten System mit Zeitschrittverfahren wird der maximal zulässige Zeitschritt berechnet und bei der TSM wird der maximal zulässige Unterrelaxationsfaktor berechnet. Die Techniken, das System über Pseudo-Zeitschritte bzw. über Unterrelaxation zu konvergieren, sind konsistent zur späteren Behandlung in den Impulsgleichungen gewählt worden. Eine direkte Vergleichbarkeit ist daher nicht unmittelbar gegeben. Dennoch ist es möglich globale Zusammenhänge über die Konvergenzeigenschaften darzustellen.

Um numerische Schemata zu testen, werden oftmals vereinfachte Gleichungssysteme verwendet. Dies erlaubt eine analytische Auswertung und lässt dennoch Rückschlüsse auf komplexere Systeme zu. Hier wird die 1D-Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.33)$$

untersucht. Diese beinhaltet einen Zeitableitungsterm, einen konvektiven Term und einen diffusiven Term mit der Viskosität  $\mu$ . Der Faktor  $c$  ist konstant im gesamten Berechnungsgebiet.

Um die Gleichung numerisch zu lösen, erfolgt zunächst eine Diskretisierung. Die einzelnen Zeitintervalle sind über den tiefgestellten Index  $n$  gegeben und die räumlichen Intervalle über den hochgestellten Index  $i$ . Die Netz- und Zeitschrittintervalle sind äquidistant. Für die Zeitableitung wird ein implizites Differenzenverfahren erster Ordnung verwendet. Die Auswertung der räumlichen Residuenbeiträge erfolgt daher zur Zeit  $n + 1$ . Der konvektive und diffusive Term werden über zentrale Differenzenverfahren approximiert. Die Diskretisierung der einzelnen Terme ergibt sich danach zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{n+1}^i - u_n^i}{\Delta t}, \quad (3.34)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\mu}{\Delta x^2} \left( u_{n+1}^{i-1} - 2u_{n+1}^i + u_{n+1}^{i+1} \right), \quad (3.35)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{c}{2\Delta x} \left( u_{n+1}^{i+1} - u_{n+1}^{i-1} \right). \quad (3.36)$$

Da ein implizites Verfahren verwendet wird, wird das Feld des nächsten Zeitschrittes mit einem linearen Löser berechnet. Die Lösungsmatrix resultiert aus der Grup-

pierung der einzelnen Terme. Eine Sortierung der Terme in Haupt- und Nebendiagonalen resultiert in

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + 2\frac{\mu}{\Delta x^2}\right)u_{n+1}^i + \left(-\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{c}{2\Delta x}\right)u_{n+1}^{i-1} + \left(-\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x}\right)u_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{\Delta t}u_n^i. \quad (3.37)$$

Für eine Diskretisierung des Gleichungssystems mit Zeitschrittverfahren ist die diagonale Dominanz abhängig von dem gewählten Zeitschritt. Daher werden die Terme aus Gleichung 3.37 in Bedingung 3.30 eingesetzt und das System nach der Zeitschrittweite umgestellt. Der maximal erlaubte Zeitschritt ergibt sich zu

$$\left|\frac{1}{\Delta t} + 2\frac{\mu}{\Delta x^2}\right| > \left|\frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2}\right| + \left|-\frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2}\right|, \quad (3.38)$$

unter den Annahmen, dass gilt:  $c > 0; \mu > 0; \left(\frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2}\right) > 0$ ,

$$\frac{1}{\Delta t} + 2\frac{\mu}{\Delta x^2} > \frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x} + \frac{\mu}{\Delta x^2}, \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{\Delta t} > \frac{c}{\Delta x} - 2\frac{\mu}{\Delta x^2}, \quad (3.40)$$

$$\Delta t < \frac{1}{\frac{c}{\Delta x} - 2\frac{\mu}{\Delta x^2}}. \quad (3.41)$$

Ein Teil des Zeitableitungsterms erscheint als Eintrag auf der Hauptdiagonalen, wobei dieser Term additiv zur Hauptdiagonalen beiträgt. Mit geringerer Zeitschrittweite vergrößert sich der Beitrag auf der Hauptdiagonalen und dadurch wird das Kriterium der diagonalen Dominanz gestärkt. Die zu wählende Zeitschrittweite ist abhängig von der Netzfeinheit, der Viskosität und der Konvektionskonstante. Mit abnehmenden Netzweiten, größer werdender Konvektionsrate oder abnehmender Viskosität reduziert sich der zulässige Zeitschritt.

### Diagonale Dominanz des linearen Systems diskretisiert mit der TSM

Nun wird analog die Diskretisierung der Zeitableitung mit der TSM betrachtet. Die Zeitableitung wird durch eine Harmonische ( $N = 1$ ) approximiert. Durch die Transformation in den Frequenzraum und wieder zurück in den Zeitraum ergeben sich drei gekoppelte, periodische Gleichungssysteme an den Kollokationspunkten  $n$ . Diese entsprechen realen physikalischen Zeitschritten und werden daher mit dem tiefgestellten Index  $n$  gekennzeichnet. Die Kollokationspunkte innerhalb einer Periode sind fest und werden zeitgleich iteriert. Es wird im Folgenden nicht mehr nach Zeitschritten, sondern nach Iterationsschritten  $k$  gelöst.

Basierend auf der Gleichung 3.17 erfolgt die Approximation der Zeitableitung an den Kollokationspunkten  $n$  nach

$$\left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|^i \approx \sum_{m=-1}^1 d_m u_{n+m} \Big|^i = d_{-1} u_{n-1}^i + \cancel{d_0 u_{n+0}^i}^0 + d_1 u_{n+1}^i. \quad (3.42)$$

Zur Approximation der Zeitableitung am Punkt  $n$  gehen nur die Funktionswerte der Punkte  $n-1, n+1$  in das Gleichungssystem ein. Diese Werte tauchen als Nebendiagonaleinträge auf. Die zeitspektrale Zeitdiskretisierung leistet daher keinen Beitrag zur Stärkung der diagonalen Dominanz.

Die räumlichen Diskretisierungen erfolgen analog zum letzten Abschnitt. Der Index  $i$  gibt die Knotennummer an. Das Gleichungssystem für den Kollokationspunkt  $n$  ist über

$$\begin{aligned} & d_1 u_{n+1}^{i,k+1} + d_{-1} u_{n-1}^{i,k+1} \\ & + \left( -\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{c}{2\Delta x} \right) u_n^{i-1,k+1} + \left( -\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x} \right) u_n^{i+1,k+1} + 2\frac{\mu}{\Delta x^2} u_n^{i,k+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

gegeben.

Zur Lösung des Systems wird der Unterrelaxationsfaktor  $\alpha$  eingeführt. Dieser wirkt sich multiplikativ auf die Hauptdiagonale des Systems aus. Die Hauptdiagonale wird über den Zusammenhang

$$\frac{1}{\alpha} \left( 2\frac{\mu}{\Delta x^2} \right) u_n^{i,k+1} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( 2\frac{\mu}{\Delta x^2} \right) u_n^{i,k} \approx 2\frac{\mu}{\Delta x^2} u_n^{i,k+1} \quad (3.44)$$

umgeformt.

Das Gleichungssystem innerhalb des linearen Löser ergibt sich somit durch Einsetzen der Gleichung 3.44 in Gleichung 3.43. Alle Beiträge zur Haupt- und Nebendiagonalen und die Einträge aus alten Iterationen führen zu

$$\begin{aligned} & d_1 u_{n+1}^{i,k+1} + d_{-1} u_{n-1}^{i,k+1} + \left( -\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{c}{2\Delta x} \right) u_n^{i-1,k+1} \\ & + \left( -\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x} \right) u_n^{i+1,k+1} + \frac{1}{\alpha} \left( 2\frac{\mu}{\Delta x^2} \right) u_n^{i,k+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( 2\frac{\mu}{\Delta x^2} \right) u_n^{i,k}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Statt nach Zeitschritten wird das System nach dem maximalen Unterrelaxationsfaktor aufgelöst, sodass diagonale Dominanz des Systems gewährleistet ist. Obwohl Zeitschrittweite und Unterrelaxationsfaktor nicht direkt vergleichbar sind, kann ge-

zeigt werden, welche Faktoren die Stabilität beeinflussen. Durch Umformen des Gleichungssystems ergibt sich der maximal zulässige Unterrelaxationsfaktor

$$\left| \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \right| \geq \underbrace{|d_1| + |d_{-1}|}_{\text{Betrag ist gleich}} + \left| -\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{c}{2\Delta x} \right| + \left| -\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x} \right|, \quad (3.46)$$

unter den Annahmen, dass gilt:  $c > 0; \mu > 0; \left( \frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) > 0$ ,

$$\frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) > 2|d_1| + \frac{c}{2\Delta x} - \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{c}{2\Delta x} + \frac{\mu}{\Delta x^2}, \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{2|d_1|\Delta x^2 + c\Delta x}{2\mu}, \quad (3.48)$$

$$\alpha < \frac{2\mu}{2|d_1|\Delta x^2 + c\Delta x}. \quad (3.49)$$

Gleichung 3.49 zeigt, dass höhere Unterrelaxationsfaktor bei zunehmender Viskosität und abnehmenden Netzweiten genutzt werden müssen. Der zeitspektrale Operator taucht als Summand im Nenner auf. Mit mehr Harmonischen und zunehmenden Frequenzen wird die diagonale Dominanz daher geschwächt und führt zu kleineren  $\alpha$ . Während Zeitschrittverfahren mit der Wahl von kleineren Zeitschritten die diagonale Dominanz stärken, reduziert die TSM die diagonale Dominanz. Diese Eigenheit der zeitspektralen Diskretisierung muss bei der Auswahl des linearen Löser beachtet werden und entsprechende Löser gewählt werden, bei denen die Konvergenzeigenschaften möglichst unabhängig von der diagonalen Dominanz der Lösungsmatrix sind. Außerdem ist zu prüfen, ob auch bei Problemen, wo eine hohe Anzahl an Harmonischen aufgelöst werden muss, ein Rechenzeitgewinn gegenüber den Zeitschrittverfahren besteht.

### Rückschluss auf die Konvergenzrate durch Eigenwertbetrachtung

Zuletzt wird die Konvergenzrate analysiert. Dazu werden anhand eines 1D-Beispiels die Eigenwerte über das Gerschgorin-Theorem approximiert. Die Eigenwerte von Zeitschrittverfahren und zeitspektralen Verfahren werden gegenübergestellt und daraus Hinweise auf die Konvergenzrate abgeleitet. Die Advektionsgleichung aus Abschnitt 3.3.2 wird auf einem Rechengebiet aus fünf Rechenknoten gelöst. Das Rechengebiet ist in Abbildung 3.5 zu sehen. Am Start- und Endknoten (0;4) liegen Randbedingungen an. Hier wird daher nicht nach den Variablenwerten gelöst.

Am Knoten 0 liegt eine zeitlich veränderliche Sinusschwingung an und am Knoten 4 eine Null-Gradienten Randbedingung. Die Randbedingungen ergeben sich so zu

- $u(x=0, t) = 1 + \sin(a \cdot t),$
- $\frac{\partial u^3}{\partial x} \approx \frac{u^4 - u^2}{\Delta x} = 0.$

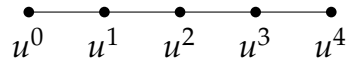


Abbildung 3.5: Finite-Differenzen-Berechnungsgebiet zur Bestimmung der Eigenwerte

Für die einzelnen Terme werden die Diskretisierungsschemata aus Abschnitt 3.5 verwendet. Zuerst wird das implizite Euler-Verfahren erster Ordnung für die Zeitdiskretisierung genutzt. Die Terme werden nach den Knoten in ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}_{BDF} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} + 2q & -q + p & 0 \\ -p - q & \frac{1}{\Delta t} + 2q & -q + p \\ 0 & -2q & \frac{1}{\Delta t} + 2q \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{A}_{BDF} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1}^1 \\ u_{n+1}^2 \\ u_{n+1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q + p) \cdot (1 + \sin(a \cdot t_{n+1})) + \frac{1}{\Delta t} u_n^1 \\ \frac{1}{\Delta t} u_n^2 \\ \frac{1}{\Delta t} u_n^3 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

sortiert, wo  $\mathbf{A}$  die Systemmatrix ist. Um die Übersicht zu verbessern, werden die Terme  $q = \frac{\mu}{\Delta x^2}$  und  $p = \frac{c}{2\Delta x}$  ersetzt.

Nun wird das lineare System mit der TSM aufgestellt. Die Zeitableitung wird mit einer Harmonischen approximiert. Es ergeben sich daher drei Kollokationspunkte, an denen gelöst wird. Bei Kopplung aller Kollokationspunkte und Netzknoten innerhalb eines Systems ergibt sich eine Systemgröße von  $[3 \times (2N + 1)][3 \times (2N + 1)]$ . Die Kollokationspunkte eines Netzknotens werden blockweise zusammen sortiert. Die Residuentermine der Netzknoten rücken daher von der Hauptdiagonalen weiter nach außen. Die zeitspektralen Beiträge sind in der Matrix  $\mathbf{D}_{TSM}$  zusammengefasst. Es ergibt sich ein Blocksystem. Die Hauptdiagonalblöcke enthalten dabei die Zeitdiskretisierung, während die Nebendiagonalblöcke die räumliche Diskretisierung enthalten. Das System wird mit dem konstanten Faktor  $\alpha$  unterrelaxiert. Das zeitspektrale System ergibt sich nach

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2\frac{q}{\alpha}\mathbf{I} + \mathbf{D}_{TSM} & (-q + p)\mathbf{I} & 0 \\ (-q - p)\mathbf{I} & 2\frac{q}{\alpha}\mathbf{I} + \mathbf{D}_{TSM} & (-q + p)\mathbf{I} \\ 0 & -2q\mathbf{I} & 2\frac{q}{\alpha}\mathbf{I} + \mathbf{D}_{TSM} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{TSM}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n^{1,k+1} \\ \mathbf{u}_n^{2,k+1} \\ \mathbf{u}_n^{3,k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{D}_{TSM} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & -d_1 \\ -d_1 & 0 & d_1 \\ d_1 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Aus den Matrizen  $\mathbf{A}_{BDF}$  und  $\mathbf{A}_{TSM}$  werden die Gerschgorin-Kreise abgeleitet. Die Hauptdiagonalen der Matrizen bilden den Mittelpunkt der Kreise. Diese sind auf der reellen Achse einzutragen. Die Radien ergeben sich als Spaltensumme der Nebendiagonalbeiträge. Analog dazu können auch die zeilenweisen Summen gebildet und verglichen werden. Die Gebiete der Eigenvektoren für zeitspektrale und Zeitschrittverfahren sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

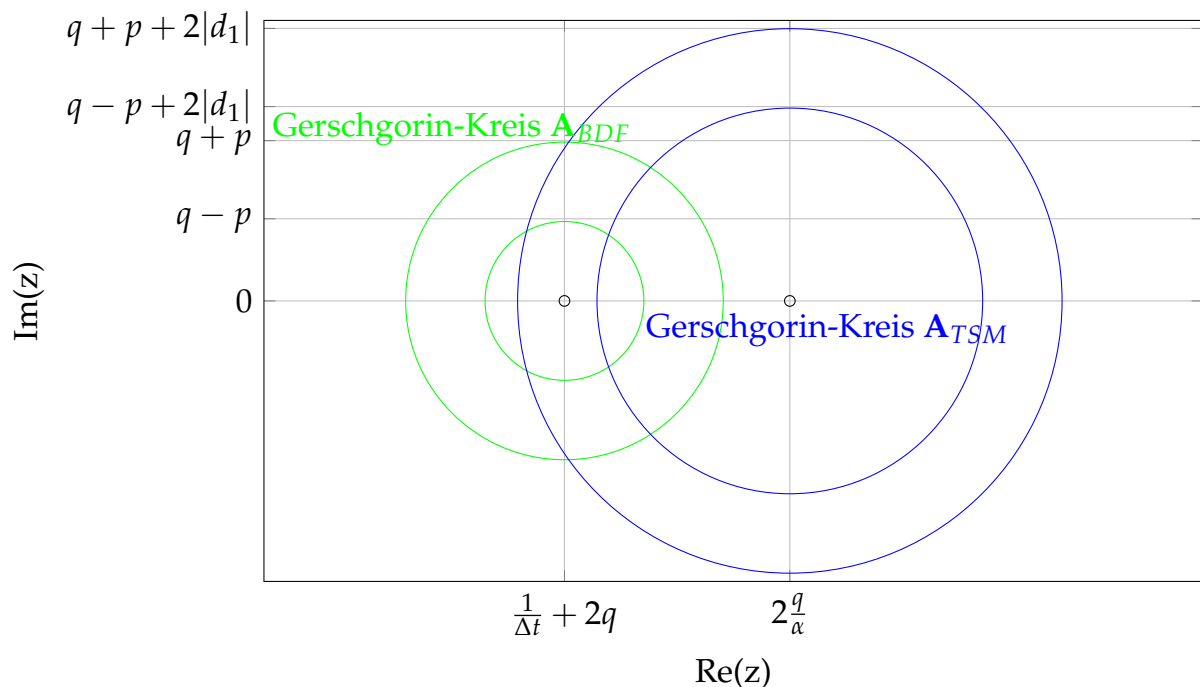


Abbildung 3.6: Spalten-Gerschgorin-Kreise zur Darstellung des Gebietes möglicher Eigenwerte für zeitspektrale Verfahren und Zeitschrittverfahren

Für TSM und Zeitschrittverfahren sind die Spaltenkreise jeweils für den kleinsten Radius und den größten Radius zu sehen. Die Mittelpunkte der Kreise verschieben sich auf der reellen Achse auf Grund der unterschiedlichen Größe von Zeitschritt und Unterrelaxationsfaktor. Um die Konvergenzrate des linearen Löser beurteilen zu können, sind die Radien der Kreise entscheidend. Mit größer werdendem Radius liegen die Eigenwerte der Matrix weiter auseinander. Bei Anwesenheit sehr großer und kleiner Eigenwerte kann die Konvergenzrate sehr klein sein [62]. Mehr Iterationen sind notwendig. Die zeitspektrale Matrix weist eine größere Spanne an Eigen-

werten auf als die Matrix des Zeitschrittverfahrens. Die Spanne wird zusätzlich erweitert bei höherer Anzahl an Harmonischen. Daraus ist grundsätzlich zu schließen, dass die TSM bei einfachen Iterationsvorschriften die Konvergenzrate herabsetzt.

Innerhalb dieses Kapitels wurden zeitspektrale Verfahren, speziell Fourier-Ansätze, vorgestellt. Zur Berechnung strömungsmechanischer Probleme wurde die TSM eingeführt. Die TSM ist bei harmonischen Problemen genauer als Zeitschrittverfahren und meist reichen wenige Harmonische, um den zeitlichen Verlauf gut zu approximieren. Dennoch zeigen die Analysen im letzten Abschnitt, dass mit zunehmenden Harmonischen und hohen Frequenzen die Konvergenzeigenschaften linearer Löser stark herabgesetzt werden. Eine genauere Betrachtung der TSM, auch mit Hinblick auf die Lösung der zeitspektralen Matrix, ist daher essenziell.

---

## 4 Lösung des zeitspektralen Gleichungssystems

Zur Lösung des inkompressiblen Gleichungssystems werden wie in Kapitel 2.5.1 beschrieben, Druckkorrektur-Verfahren verwendet. Im Gegensatz dazu werden dichte-basierte Verfahren zur Lösung kompressibler Strömungen genutzt. Große Fortschritte der TSM sind vor allem auf Basis dichtebasierter Löser entstanden. Die vorliegende Arbeit baut auf diesen Ergebnissen auf. Zunächst werden daher die dichte-basierten Verfahren und die vorhandenen TSM-Implementierungen vorgestellt.

Anschließend werden die Implementierungen der TSM im Rahmen dieser Arbeit erläutert. Die Konvergenz und Effizienz dieser sind neben der Diskretisierung auch von der Kopplung der räumlichen und zeitlichen Einträge und dem linearen Löser abhängig. Daher werden in diesem Kapitel auch verschiedene Konzepte zur Umsetzung der räumlichen und zeitlichen Kopplung eingeführt.

### 4.1 Zeitspektrale dichte-basierte Verfahren

Bei kompressiblen Strömungen wird neben der Bilanz für Masse und Impuls auch eine Gleichung für Energie gelöst. Eine Schließung des Systems ergibt sich durch eine Zustandsgleichung, die einen Zusammenhang zwischen Dichte, Temperatur und Druck herstellt. Oftmals wird das ideale Gasgesetz verwendet. Im Gegensatz zu den inkompressiblen Gleichungen besteht ein direkter Zusammenhang zwischen Masse, Impuls und Energie und eine direkte Kopplung der Gleichungen ist möglich. Zur Lösung des Systems haben sich in der Aerodynamik eigenständige Verfahren etabliert [5]. Diese Verfahren unterscheiden sich zu den Verfahren, die für hydraulische Probleme genutzt werden.

Zur Lösung kompressibler Strömungen werden dichte-basierte Verfahren genutzt. Bei diesen Verfahren werden meist alle Gleichungen zusammen gelöst. Je KV ergibt sich daher ein Block-System. Für fünf Gleichungen (drei Impulskomponenten, Dichte und Energie) hat das System eine Blockgröße von  $[5 \times 5]$ . Turbulenzgleichungen werden häufig getrennt gelöst. Um das System einfacher zu konvergieren, werden oft künstliche Zeitschritte eingeführt. Das Newton-Verfahren bzw. implizite Zeitschrittverfahren zur Lösung des nichtlinearen Systems werden eingesetzt. Für diese Verfahren wird die Jacobi-Matrix zur Lösung benötigt. Oft wird die Jacobi-Matrix



	Druckbasierte Verfahren	Dichtebasierte Verfahren
Anwendungsgebiete	inkompressible Strömungen	für sub-/trans-/supersonische Strömungen
Lösungsalgorithmen	Druckkorrektur-Verfahren, Sequentielle Lösung der einzelnen Impulskomponenten und der Druckkorrekturgleichung, Jacobi-freies Verfahren	alle Gleichungen (Dichte, Impuls, Energie) werden gekoppelt gelöst, es werden explizite oder implizite Verfahren genutzt
Vertreter	SIMPLE [55], PISO [26]	<b>explizite Verfahren:</b> Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren [38], MacCormack [5] <b>implizite Verfahren:</b> Krylow-Verfahren [5]

Tabelle 4.1: Unterschiede zwischen Druck- und dichtebasierten Verfahren

durch Verfahren niedrigerer Ordnung approximiert und durch explizite Terme höherer Ordnung korrigiert. Speziell angepasste Vorkonditionierer ermöglichen ein effizientes Lösen des auftretenden Gleichungssystems [38, 7]. Die Unterschiede zwischen druck- und dichtebasierten Verfahren sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Inkompressible Strömungen können nicht ohne Weiteres mit dichtebasierten Verfahren berechnet werden. Dies resultiert aus der unterschiedlichen Natur der inkompressiblen Gleichungen. Bei Strömungen geringer  $Ma$ -Zahlen ( $Ma < 0,3$ ) wird bei dichtebasierten Verfahren das System der Erhaltungsgleichungen sehr steif. Daraus resultieren sehr kleine Zeitschritte, die ein effizientes Lösen des Systems schwierig machen. Unterschiedliche Erweiterungen, wie die Artificial Compressibility Method [17] oder eine Kombination aus dieser und Vorkonditionierungstechniken [7], erweitern das Einsatzspektrum auf Strömungen mit geringen  $Ma$ -Zahlen.

Dichtebasierte Verfahren werden auch zur Berechnung von Turbomaschinen genutzt. Zeitspektrale Verfahren wurden daher oft auf Grundlage dieser entwickelt. Das zeitspektrale, nichtlineare System wird bei Sicot, Puigt und Montagnac [66] mit einem impliziten Zeitschrittverfahren und bei Mundis und Mavriplis [50] mit einem inexakten Newton-Verfahren gelöst. Bestandteil einer Newton-Iteration ist das Lösen eines linearen Systems. Mundis und Mavriplis [50] nutzen zunächst einen Block-Jacobi-Algorithmus zur Lösung des Systems. Auf Basis dieser Erkenntnisse entwickeln sie unterschiedliche Lösungsmethodiken. In Anlehnung an diese Forschung sollen im Rahmen dieser Arbeit die Möglichkeit zeitspektraler Diskretisierung innerhalb druckbasierter Verfahren untersucht werden. Um die Unterschiede zwischen dem aktuellen Stand der Forschung und den innerhalb dieser Arbeit entwickelten Methoden aufzuzeigen, werden nachfolgend die Entwicklungen von Mun-

dis und Mavriplis [50] vorgestellt. Die Nomenklatur orientiert sich an Mundis und Mavriplis [50]. Die Erläuterung der Algorithmen erfolgt auf Basis der inkompressiblen Erhaltungsgleichungen aus Kapitel 2, um Konsistenz zu den früheren Abschnitten zu wahren. Es ist zu beachten, dass Mundis und Mavriplis die kompressiblen Gleichungen nutzen und daher größere Block-Systeme resultieren.

Mit dem Newton-Verfahren können nichtlineare Systeme numerisch gelöst werden. Für ein nichtlineares, zeitspektrales System am Kollokationspunkt  $n$  mit zeitlich konstanten KV

$$V\mathbf{D}_n(\mathbf{W}) + \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n) = 0 \text{ mit } \mathbf{D}_n(\mathbf{W}) = \sum_{m=-N}^N d_m \mathbf{W}_{n+m} \quad (4.1)$$

ist das Newton-Verfahren über

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{W} = -V\mathbf{D}_n(\mathbf{W}) - \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n) \quad (4.2)$$

abgebildet. Es ergibt sich ein semilineares System mit der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$ .

Die Einträge der Jacobi-Matrix können in

$$\mathbf{J} = \left( \frac{V}{\Delta\tau} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum,n}^{1.Ord.} + Vd_m \mathbf{I} \right) \quad (4.3)$$

zerlegt werden. Die Zeitableitung ist mit  $\frac{V}{\Delta\tau} \mathbf{I}$ , die Jacobi-Matrix der diskretisierten Flüsse erster Ordnung am Kollokationspunkt  $n$  mit  $\mathbf{J}_{raum,n}^{1.Ord.}$  und der zeitspektrale Term ist mit  $Vd_m \mathbf{I}$  gegeben, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist, die alle KV pro Kollokationspunkt umfasst. Der zeitspektrale Term ruft nur Einträge in Nebendiagonalplätzen hervor, wie auch in der Matrixschreibweise gesehen werden kann

$$\mathbf{D}_{TSM} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \mathbf{I} & \cdots & d_N \mathbf{I} & d_{-N} \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{-1} \mathbf{I} \\ d_{-1} \mathbf{I} & 0 & d_1 \mathbf{I} & \cdots & d_N \mathbf{I} & d_{-N} \mathbf{I} & \cdots & \cdots & d_{-2} \mathbf{I} \\ d_{-2} \mathbf{I} & d_{-1} \mathbf{I} & 0 & d_1 \mathbf{I} & \cdots & d_N \mathbf{I} & d_{-N} \mathbf{I} & \cdots & d_{-3} \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 \mathbf{I} & \cdots & d_N \mathbf{I} & d_{-N} \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & d_{-1} \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Für die zweidimensionalen, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen hat die räumlichen Jacobi-Matrix eine Blockgröße von  $[3 \times 3]$ . Diese wird zum Kollokationspunkt  $n$  ausgewertet. Nach der Dichte  $\rho$  und den zwei Geschwindigkeitskom-

ponenten  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  werden die Gleichungen jeweils abgeleitet. Die Matrix ergibt sich zu

$$\mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} & \frac{\partial R_1}{\partial \rho u_1} & \frac{\partial R_1}{\partial \rho u_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \rho} & \frac{\partial R_2}{\partial \rho u_1} & \frac{\partial R_2}{\partial \rho u_2} \\ \frac{\partial R_3}{\partial \rho} & \frac{\partial R_3}{\partial \rho u_1} & \frac{\partial R_3}{\partial \rho u_2} \end{pmatrix}_n. \quad (4.5)$$

Es ist zu beachten, dass die Dichte unveränderlich ist. Die Matrix  $\mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.}$  ist für inkompressible Fluide entsprechend schlecht konditioniert.

Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  wird auf Grund der Größe nicht direkt invertiert, sondern es werden Approximationen gesucht, um eine möglichst hohe Genauigkeit bei geringem Speicher zu erreichen. Sicot, Puigt und Montagnac [66] nutzen ein Block-Jacobi-Verfahren zur Vorkonditionierung des zeitspektralen Systems. Die Blöcke umfassen das gesamte Berechnungsgebiet und alle Strömungsvariablen zu einem Kollokationspunkt  $n$ . Die Nebendiagonalterme aus der zeitspektralen Kopplung werden in der Jacobi-Matrix vernachlässigt und innerhalb einer Block-Jacobi-Iteration wieder eingeführt. Es wird ein System der Form

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V}{\Delta \tau} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} \right) \Delta \mathbf{W}_n^{l+1} \\ &= \underbrace{-V \mathbf{D}_n(\mathbf{W}) - \mathbf{R}_n(\mathbf{W}_n)}_{-\mathbf{R}_{TSM}} - V \mathbf{D}_n(\Delta \mathbf{W}^l) \quad 0 \leq n < 2N + 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

gelöst, wo der Index  $l$  die Jacobi-Iteration bezeichnet. Zur Lösung des linearen Systems wird symmetric successive overrelaxation (SSOR) verwendet.

Das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren benötigen diagonale Dominanz, um zu konvergieren [62]. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen und höheren Frequenzen entfernt sich das System jedoch immer weiter von der diagonalen Dominanz und wird außerdem steifer. Es ist daher unklar, ob ein Zeitgewinn im Vergleich zu herkömmlichen Zeitschrittverfahren erzielt werden kann. Die Methode zur Lösung des zeitspektralen Gleichungssystems wird über die Jahre sukzessiv von Mundis und Mavriplis [46, 49, 50, 51] weiterentwickelt, mit dem Ziel einen optimalen Löser für zeitspektrale Systeme zu finden.

Um unabhängig von der diagonalen Dominanz des Systems zu sein, schlagen sie die Verwendung eines flexiblen Generalized Minimum Residual (FGMRES) Verfahrens nach Saad [62] als linearen Löser vor. Der FGMRES setzt nicht zwingend diagonale Dominanz zur Lösung des Systems voraus, zudem besteht eine engere Kopplung der einzelnen Kollokationspunkte. Sie stellen fest, dass mit mehr Kollokationspunkten das System schwieriger zu lösen ist. Aus dieser Erkenntnis resultiert ein Vorkonditionierer, bei dem der Zeitschritt unabhängig von der Anzahl der Kollokationspunkte und der Grundfrequenz ist. Diesen Vorkonditionierer bezeichnen sie auch als Wellenlängen-unabhängig. Nachfolgend soll dieser GMRES-

Approximated-Factorization-Löser (GMRES-AF) nach Mundis und Mavriplis [51] vorgestellt werden. Anhand dieses Löser wird deutlich gemacht, welche Unterschiede zwischen den innerhalb dieser Arbeit entwickelten Lösern und den bereits bekannten Lösern bestehen.

Auf das Residuum von Gleichung 4.6 wird eine Defektkorrektur-Iteration angewendet. Die räumliche Jacobi-Matrix zweiter Ordnung wird über diese Defektkorrektur im System berücksichtigt. Es ergibt sich ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V}{\Delta\tau_{BCGS}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} \right) (\Delta\mathbf{W}_n^{l+1} - \Delta\mathbf{W}_n^l) \\ &= -\mathbf{R}_{TSM} - V\mathbf{D}_n(\Delta\mathbf{W}^l) - \left( \frac{V}{\Delta\tau_{FGMRES}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{2.Ord.} \right) \Delta\mathbf{W}_n^l. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Zuerst wird eine Iteration mit einer Jacobi-Matrix erster Ordnung mit einer dem Gauß-Seidel-Verfahren angepassten Zeitschrittweite durchgeführt, bevor innerhalb einer zusätzlichen Iterationsschleife das Ergebnis basierend auf einer Jacobi-Matrix zweiter Ordnung korrigiert wird. Die Zeitschrittweite des Block-Gauß-Seidel-Vorkonditionierers ist mit  $\tau_{BCGS}$  und die höhere Zeitschrittweite des FGMRES ist mit  $\tau_{FGMRES}$  gegeben.

In dem System 4.7 ist der Zeitschritt des Vorkonditionierers immer noch abhängig von den aufgelösten Frequenzen. Daher wird beim GMRES-AF-Löser der zeitspektrale Term mit in der Jacobi-Matrix betrachtet. Das zu lösende System ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V}{\Delta\tau_{BCGS}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} + V\mathbf{D}_{TSM} \right) (\Delta\mathbf{W}_n^{l+1} - \Delta\mathbf{W}_n^l) \\ &= -\mathbf{R}_{TSM} - V\mathbf{D}_n(\Delta\mathbf{W}^l) - \left( \frac{V}{\Delta\tau_{FGMRES}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{2.Ord.} \right) \Delta\mathbf{W}_n^l. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Um die linke Seite des Systems 4.8 zu invertieren, wird eine approximierende Faktorisierung verwendet. Es erfolgt eine Zerlegung nach

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V}{\Delta\tau_{BCGS}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} + V\mathbf{D}_{TSM} \right) \\ &= (\mathbf{I} + \Delta\tau_{BCGS}\mathbf{D}_{TSM}) \left( \frac{V}{\Delta\tau_{BCGS}} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.} \right) - \underbrace{\Delta\tau_{BCGS}\mathbf{J}_{raum.,n}^{1.Ord.}\mathbf{D}_{TSM}}_{\text{Fehler}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sodass eine einfache Invertierung der einzelnen Komponenten möglich ist. Durch die Approximation wird ein Fehler in das Gleichungssystem eingebracht. Dieser Fehler skaliert mit  $\Delta\tau_{BCGS}$  und ist daher vernachlässigbar.

Zunächst wird ein Zwischenwert durch Invertierung der zeitspektralen Matrix bestimmt. Die Inversion der Komponente erfolgt im Frequenzraum, da die Matrix

dort nur Diagonalbeiträge besitzt. Das Zwischenergebnis von Gleichung 4.8 wird mit Hilfe einer FFT-Bibliothek wieder in den Zeitraum transformiert. Nun wird die räumliche Komponente der Jacobi-Matrix durch den Gauß-Seidel-Algorithmus berechnet. Damit ist das System vorkonditioniert und kann über einen flexiblen GMRES gelöst werden.

Es ist festzuhalten, dass die nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen diskretisiert mit der TSM entweder durch ein Newton-Verfahren oder ein implizites Euler-Verfahren gelöst werden können. Die Lösung der Erhaltungsgleichungen erfolgt gekoppelt je KV. Innerhalb der Newton-Iterationen muss eine Jacobi-Matrix aufgestellt und eine approximierte Inverse dieser bestimmt werden. Die Komplexität, d.h. der Grad der Approximation der Jacobi-Matrix, ist unterschiedlich und abhängig vom gewählten linearen Löser und Vorkonditionierer. Der effizienteste, zeitspektrale Löser für kompressible Anwendungen nutzt approximierte Faktorisierung innerhalb eines Block-Gauß-Seidel-Verfahrens als Vorkonditionierer und löst dieses System mit einem flexiblen GMRES. Alle räumlichen und zeitlichen Blöcke sind dadurch stark miteinander gekoppelt.

## 4.2 Zeitspektrale Gleichungen innerhalb des Druckkorrektur-Algorithmus

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 4.1 vorgestellten Techniken wird in dieser Arbeit ein Druckkorrektur-Verfahren zur Lösung des gekoppelten Gleichungssystems angewendet. Dieses ist ein Jacobi-Matrix-freies Verfahren, d.h. das Aufstellen und Invertieren der Jacobi-Matrix entfällt. Die Gleichungen werden entkoppelt voneinander gelöst. Die Aktualisierung der einzelnen Strömungsgrößen erfolgt verzögert.

Bei den inkompressiblen, zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen ohne Turbulenzmodellierung ergeben sich drei Gleichungssysteme (zwei Impulskomponenten und eine Druckgleichung). Diese werden nacheinander entkoppelt gelöst. Es erfolgt eine Linearisierung mit Hilfe der Picard-Iteration. Die Impulsgleichungen mit dem zeitspektralen Operator werden innerhalb des Prediktor-Schrittes gelöst, während die Druckkorrektur-Gleichung im Korrektor-Schritt berechnet wird.

Angelehnt an die Herleitung in Kapitel 2.5 ist der Prediktorschritt in Matrixschreibweise über

$$\mathbf{A}_{c,n}^k \mathbf{u}_{c,n}^{k*} + \sum_l \mathbf{A}_{l,n}^k \mathbf{u}_{l,n}^{k*} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1}) - \nabla p_{c,n}^{k-1*} - \mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^{k-1}) \text{ mit } 0 \leq n < 2N + 1 \quad (4.10)$$

gegeben, wo die Diagonaleinträge der Lösungsmatrix mit  $\mathbf{A}_{c,n}^k$ , die Nebendiagonaleinträge aus der räumlichen Diskretisierung mit  $\mathbf{A}_{l,n}^k$ , der zeitspektrale Operator mit

$\mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^{k-1})$  und zusätzliche Quellterme mit  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1})$  gegeben sind. Die Kollokationspunkte sind mit dem tiefgestellten Index  $n$  gekennzeichnet und der hochgestellte Index  $k$  kennzeichnet die Druckkorrektur-Iteration. Aus der Definition des zeitspektralen Operators folgt, dass alle Impulsgleichungen aller Kollokationspunkte  $n$  gekoppelt sind.

Innerhalb der Druckkorrektur-Gleichung taucht keine explizite Zeitableitung auf. Daher sind die Kollokationspunkte  $n$  im Korrektor-Schritt entkoppelt. Es werden  $2N + 1$  entkoppelte System der Form

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_n^{k*}) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mathbf{A}_{c,n}^k} (\nabla p_{c,n}^{k'}) \right) \quad (4.11)$$

gelöst. Die zeitspektrale Approximation hat keinen Einfluss auf das Gleichungssystem im Korrektor-Schritt.

Es ist festzuhalten, dass die zeitspektrale Diskretisierung allein im Prediktor-Schritt zu Änderungen im Lösungsschema führt. Die Umsetzung der Kopplung der Geschwindigkeitsfelder hat entscheidenden Einfluss auf die Performance und Konvergenz des Algorithmus. Bei Verwendung dichtebasierter Verfahren zeigten sich Probleme beim Lösen mit hohen Frequenzen und vielen Kollokationspunkten. Dies ist auch bei druckbasierten Verfahren der Fall. Daher sind unterschiedliche Strategien zur effizienten Lösung des zeitspektralen Systems im Rahmen dieser Arbeit entwickelt worden. Eine Übersicht der implementierten und getesteten Algorithmen gibt Tabelle 4.2. Eine ausführliche Darstellung der Algorithmen ist nachfolgend zu finden.

Bezeichnung	ZJ	BGS	GMRES-DILU	GMRES-DILU-PETSc
Löser	Jacobi-Verfahren	Block-Gauß-Seidel-Verfahren mit direkter Block-Invertierung durch Cholesky-Zerlegung	FGMRES	FGMRES
Vorkonditionierer	-		iLU	iLU
Bibliotheken	-	-	-	PETSc

Tabelle 4.2: Überblick der verwendeten Löser und Vorkonditionierer

## 4.3 Lösungsstrategien

### 4.3.1 Zeitliches Jacobi-Verfahren

Die Lösung des Gleichungssystems 4.10 erfolgt zunächst über eine Jacobi-Iteration. Der Prediktor-Schritt am Kollokationspunkt  $n$  ist mit

$$\mathbf{A}_{c,n}^k \mathbf{u}_{c,n}^{k*} + \sum_l \mathbf{A}_{l,n}^k \mathbf{u}_{l,n}^{k*} = -\mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^{k-1}) - \nabla p_{c,n}^{k-1*} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1}) \quad (4.12)$$

gegeben. Die räumlichen Blöcke werden zum Iterationszähler  $k^*$  ausgewertet, während die zeitspektralen Terme aus den Feldern der alten Iteration  $k-1$  abgeschätzt werden. Nach allen KV eines Kollokationspunktes  $n$  wird gleichzeitig gelöst.

Zur Veranschaulichung wird ein Berechnungsgebiet mit neun KV betrachtet. Das Berechnungsgebiet ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die einzelnen KV sind von eins bis neun durchnummeriert.

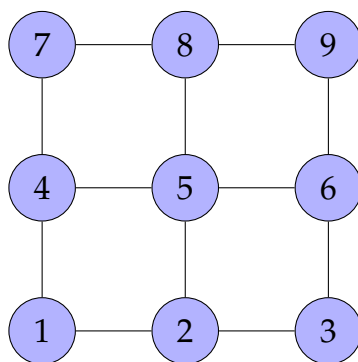


Abbildung 4.1: Berechnungsgebiet bestehend aus neun KV

Für dieses Problem wird beispielhaft die Lösungsmatrix aufgestellt. Die Haupt- und Nebendiagonalterme der linearen Lösungsmatrix werden in  $\mathbf{A}$  zusammengefasst. Das Gleichungssystem im Prediktor-Schritt für den Kollokationspunkt  $n = 0$  ist

$$\mathbf{A}_n^k \cdot \mathbf{u}_n^{k*} = -\mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^{k-1}) - \nabla p_{c,n}^{k-1*} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1}). \quad (4.13)$$

Die Diagonal- und Nebendiagonaleinträge,  $\mathbf{A}_{c,n}^k$  und  $\mathbf{A}_{l,n}^k$ , resultierend aus der direkten Nachbarschaftsbeziehung sind in

$$\mathbf{A}_n^k = \begin{pmatrix} \text{KV} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & \times & \times & & \times & & & & & \\ 2 & \times & \times & \times & & \times & & & & \\ 3 & & \times & \times & & & \times & & & \\ 4 & \times & & & \times & \times & & \times & & \\ 5 & & \times & & \times & \times & \times & & \times & \\ 6 & & & \times & & \times & \times & & & \times \\ 7 & & & & \times & & & \times & \times & \\ 8 & & & & & \times & & \times & \times & \times \\ 9 & & & & & & \times & & \times & \times \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

schematisch dargestellt. Die Matrix hat nur räumliche Einträge. Die Nebendiagonaleinträge aus der räumlichen Diskretisierung sind in grün hinterlegt. Es zeigt sich, dass die Lösungsmatrix dünn besetzt ist mit der Größe [KV-Anzahl  $\times$  KV-Anzahl]. Der zeitspektrale Operator wird aus den alten Geschwindigkeitsfeldern berechnet. Es handelt es sich daher um eine schwache zeitliche Kopplung.

Der Pseudocode für eine schwache Kopplung des zeitspektralen Operators ist schematisch in Programm 4.1 dargestellt. Zuerst werden die Geschwindigkeiten basierend auf dem alten Druckgradienten für jeden Kollokationspunkt  $n$  und jede räumliche Komponente  $i$  berechnet. Anschließend wird die Druckkorrektur-Gleichung für jeden Kollokationspunkt gelöst. Nach jedem Iterationsschritt  $k$  werden die Geschwindigkeitsfelder  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ausgetauscht und der neue zeitspektrale Operator ermittelt.

```

//Druckkorrektur-Iteration
for k = 1, ..., K do
    //Iteration über die Kollokationspunkte
    for n = 1, ..., 2N+1 do
        //Iteration über die Impulskomponenten
        for i = 1, ..., 3 do
            Löse nach  $\mathbf{u}_{n,i}^{k*}$  //gekoppelt für alle KV
        end for
        Löse nach  $\nabla p_{c,n}^k$ 
        Löse Turbulenzgleichung
    end for
    Berechne  $\mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^k)$ 
    Berechne räumlich-zeitliches Residuum
    If Residuum < Toleranz Stop.
end for

```

Programm 4.1: Pseudocode für den ZJ-Löser



Es werden zwei Parallelisierungsstrategien verwendet. Die räumliche Parallelisierung je Kollokationspunkt wird über Partitionierung umgesetzt. Dazu werden bereits in OpenFOAM® vorhandene Funktionalitäten genutzt. Die Parallelisierung erfolgt über die OpenMPI-Bibliotheken. Zusätzlich wird die Zeitebene parallelisiert. Jeder Kollokationspunkt  $n$  wird auf einem separaten Prozessor gelöst. Nach Berechnung aller Strömungsfelder für alle Punkte wird der zeitspektrale Operator auf einem Masterprozessor zusammengeführt. Anschließend wird das Feld an die anderen Prozessoren mit einer Broadcast-Operation verteilt. Auch für die zeitliche Parallelisierung werden die OpenMPI-Bibliotheken verwendet.

Die Gleichungssysteme im Prediktor- und Korrektor-Schritt werden über bekannte lineare Löser gelöst. Zur Lösung des linearen Systems im Prediktor-Schritt wird ein Gauß-Seidel-Verfahren genutzt und im Korrektor-Schritt ein Krylow-Verfahren mit einer inkompletten LU-Zerlegung (iLU).

Der ZJ-Löser zeichnet sich durch seine gute Parallelisierbarkeit und einfache Implementierung in einen vorhandenen Strömungslöser aus.

### 4.3.2 Block-Gauß-Seidel-Verfahren mit direkter Block-Invertierung

Durch Verwendung des Jacobi-Verfahrens reduzieren sich die Konvergenzeigenschaften des Löser mit höheren Frequenzen und Harmonischen, da sich die Systemmatrix von der diagonalen Dominanz entfernt. Die zeitliche Kopplung innerhalb des räumlichen Jacobi-Verfahrens ist schwach. Um dies zu beheben, wird der Lösungsalgorithmus in diesem Abschnitt auf eine starke zeitliche Kopplung ausgerichtet. Statt einer Kopplung der räumlichen Blöcke werden hier alle Kollokationspunkte je KV gekoppelt vgl. [51]. Es ergeben sich damit Blöcke der Größe  $[(2N + 1) \times (2N + 1)]$ . Die räumlichen Residuenbeiträge werden durch Lösung innerhalb eines Block-Gauß-Seidel-Algorithmus beibehalten. Für jedes KV  $c$  ist

$$\underbrace{\mathbf{A}_c^k \mathbf{u}_c^{k*} + \mathbf{D}(\mathbf{u}_c^{k*})}_{\mathbf{A}_{BGS} \cdot \mathbf{u}_c^{k*}} = - \sum_l \mathbf{A}_l^{k-1*} \mathbf{u}_l^{k-1*} - \nabla p_c^{k-1*} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}^{k-1}) \quad (4.15)$$

zu lösen. Bei dem Term  $\sum_l \mathbf{A}_l^{k-1*} \mathbf{u}_l^{k-1*}$  steht der Iterationszähler  $k - 1*$  für die aktuellsten Nebendiagonalterme.

Für das in Abschnitt 4.3.1 gezeigt Beispiel ergibt sich im Prediktor-Schritt die Lösungsmatrix zu

$$\mathbf{A}_{BGS} = \begin{pmatrix} \text{Zeit} & t_0 & t_1 & t_2 \\ t_0 & \times & \times & \times \\ t_1 & \times & \times & \times \\ t_2 & \times & \times & \times \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Die Lösungsmatrix im direkt zu lösenden Block ist über die Kollokationspunkte geordnet. Die Nebendiagonalen aus der räumlichen Diskretisierung tauchen als Quellterme auf der rechten Seite von Gleichung 4.15 auf. Die Hauptdiagonalen der Lösungsmatrix werden durch Terme der räumlichen Diskretisierung besetzt. Der zeitspektrale Term hat keine Einträge in der Hauptdiagonalen. Der zeitspektrale Term, in Gleichung 4.16 hinterlegt in rot, verursacht nur Einträge in den Nebendiagonalen der Lösungsmatrix. Durch diese Lösungsstrategie ergibt sich eine vollbesetzte Lösungsmatrix. Es ist anzumerken, dass die Größe eines Blockes des BGS-Lösers viel kleiner ist als die Matrix des ZJ-Lösers, da in der Regel die Anzahl der Harmonischen deutlich geringer ist als die Anzahl der KV.

Zur Lösung des vollbesetzten Systems wird ein direkter Löser mit Cholesky-Zerlegung verwendet. Da die Systeme sehr klein sind, fällt die kubische Komplexität des direkten Löses erst bei stark zunehmender Anzahl an Harmonischen ins Gewicht.

Bei Verwendung des Löses kommt es bei räumlichen Diskretisierungen zweiter Ordnung zu Konvergenzproblemen. Das Gauß-Seidel-Verfahren ist auf diagonale Dominanz angewiesen. Bei räumlicher Diskretisierung zweiter Ordnung reduziert sich der Beitrag des konvektiven Terms innerhalb der Diagonalen und die zeitspektralen Einträge in den Nebendiagonalen überwiegen. Kleine Unterrelaxationsfaktoren sind notwendig, um diagonale Dominanz zu erhalten. Um die Konditionierung der Matrix bei Diskretisierung des konvektiven Terms mit erster Ordnung zu erhalten und dennoch eine Genauigkeit zweiter Ordnung zu bekommen, wird eine Defektkorrektur (DK) eingeführt [23].

DK-Verfahren [9] werden verwendet, um diskrete Lösungen hoher Ordnung für Differentialgleichungen bei iterativen Berechnungen auf Basis von Lösungen niedriger Ordnung zu erhalten. Der Defekt durch eine Näherungslösung wird bestimmt. Die Funktionsweise wird an dem System  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Q}$  erklärt. Die konvektiven Terme seien in

$$\tilde{\mathbf{A}}_h \cdot \mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{Q}}_h \quad (4.17)$$

mit einem Diskretisierungsschema erster Ordnung und in

$$\hat{\mathbf{A}}_h \cdot \mathbf{u}_h = \hat{\mathbf{Q}}_h \quad (4.18)$$

mit einem Diskretisierungsschema zweiter Ordnung approximiert. Dann ergibt sich die Gleichung für die DK nach Auzinger [9] zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_h \mathbf{u}_h^{s+1} := \tilde{\mathbf{A}}_h \mathbf{u}_h^s - (\hat{\mathbf{A}}_h \mathbf{u}_h^s - \hat{\mathbf{Q}}_h), \quad s = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Zuerst wird das System 4.17 gelöst und der Startwert  $\mathbf{u}_h^0$  für die DK-Iteration 4.19 verwendet. Die Konvergenzeigenschaften der DK sind abhängig von der Approximation  $\tilde{\mathbf{A}}_h \approx \hat{\mathbf{A}}_h$ . Dwight, Lucas und Bijl [23] geben für ausreichend kleine Feh-

ler an, dass zehn bis zwanzig DK-Iteration notwendig sind. Die zusätzlichen DK-Iterationen können die Anzahl der zu lösenden linearen Gleichungssysteme erhöhen. Die Lösung des Systems  $\tilde{\mathbf{A}}_h$  ist jedoch meist schneller als die Lösung des Systems  $\hat{\mathbf{A}}_h$ .

Der Pseudocode für den BGS-Löser mit DK-Iterationen ist in Programm 4.2 zu sehen. Es ergeben sich insgesamt vier Schleifen zur Lösung der Impulsgleichungen: die Druckkorrektur-Iteration  $k$ , die einzelnen Impulskomponenten  $i$ , die Iteration über die KV  $c$  und die DK-Iteration  $s$ .

<code>//Druckkorrektur-Iteration</code>	1
<code>for k = 1, ..., K do</code>	2
<code>//Iteration über die Impulskomponenten</code>	3
<code>for i= 1, ...,3 do</code>	4
<code>//Defektkorrektur-Iteration</code>	5
<code>for s=1,...,S do</code>	6
<code>//Iteration über die KV</code>	7
<code>for c = 1,...,C do</code>	8
Löse nach $\mathbf{u}_{c,i}^{k*}$ //gekoppelt gelöst	9
end for	10
Löse nach $\mathbf{u}_{c,i}^{s+1}$	11
end for	12
end for	13
<code>//Iteration über die Kollokationspunkte</code>	14
<code>for n = 1, ..., 2N+1 do</code>	15
Löse nach $\nabla p_{c,n}^k$ //nicht gekoppelt gelöst	16
Löse Turbulenzgleichungen	17
end for	18
Berechne räumlich-zeitliches Residuum	19
If Residuum < Toleranz Stop.	20
end for	21

Programm 4.2: Pseudocode für den BGS-Löser

In Abbildung 4.2 sind die einzelnen Parallelisierungsschritte innerhalb dieses Algorithmus zur Veranschaulichung grafisch dargestellt. Die räumliche Ebene wird über Partitionierung analog zu dem ZJ-Algorithmus parallelisiert. Dies erfolgt über die in OpenFOAM® eingebundenen OpenMPI-Bibliotheken. Wie in Abbildung 4.2 zu sehen, erfolgt eine Zerlegung des Berechnungsgebietes in drei Untergebiete, sowohl im Prediktor- wie auch im Korrektor-Schritt. Jedes Untergebiet (CPU0, CPU1, CPU2) befindet sich auf einer einzelnen CPU. Zusätzlich dazu werden die zeitlichen Blöcke im Prediktor-Schritt über die OpenMP-Bibliothek parallelisiert. Dies erfolgt in OpenMP über Threads. Im Rahmen dieser Arbeit werden pro CPU vier Threads genutzt. Diese sind in Abbildung 4.2 durch die unterschiedlichen Helligkeitsabstufungen gekennzeichnet und zusätzlich mit den Abkürzungen (T0, T1, T2, T3) be-

nannt. Auf jeder CPU werden also mehrere Threads ausgeführt. Eine Beschleunigung durch OpenMP erfolgt nur im Prediktor-Schritt. Im Korrektor-Schritt steht nur Parallelisierung durch OpenMPI zur Verfügung. Diese Lösungsstrategie ermöglicht einen hohen Grad an Parallelisierung.

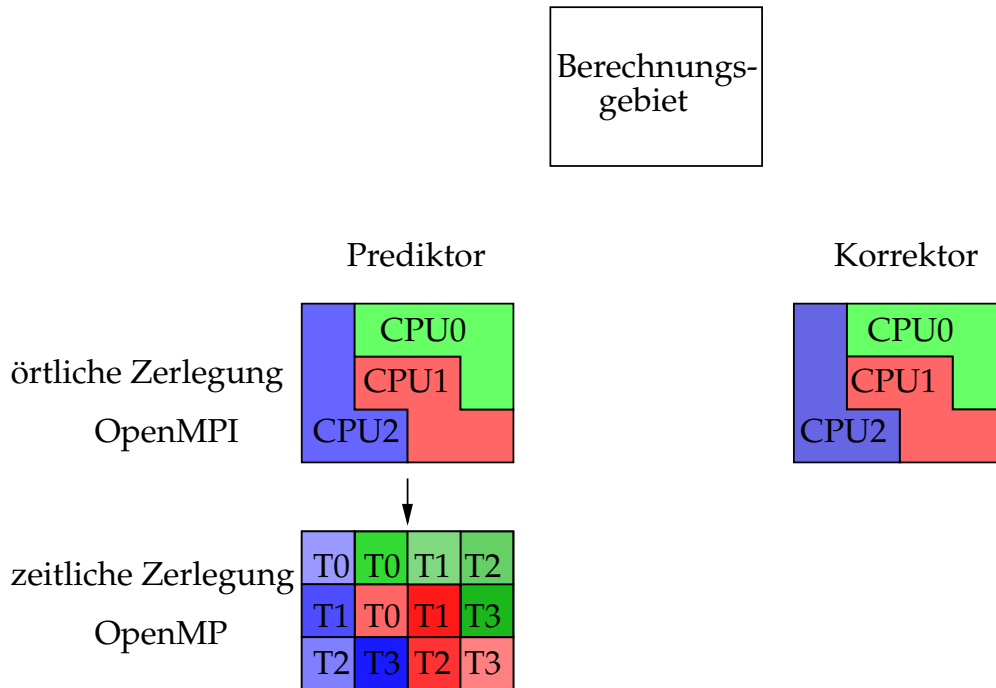


Abbildung 4.2: Darstellung der Parallelisierungsstrategie im BGS-Löser

### 4.3.3 Voll gekoppeltes zeitlich-räumliches System

Um sowohl einer hohen Anzahl von Harmonischen, wie auch räumlichen Gradienten gerecht zu werden, wird ein Algorithmus mit einer starken Kopplung der räumlichen und zeitlichen Ebene analysiert. Die Diskretisierungsterme werden nach Kollokationspunkten sortiert in ein Gleichungssystem geordnet. Die zeitspektralen Terme und die räumlichen Flüsse werden zur Iteration  $k^*$  ausgewertet

$$\mathbf{A}_{c,n}^k \mathbf{u}_{c,n}^{k*} + \sum_l \mathbf{A}_{l,n}^k \mathbf{u}_{l,n}^{k*} + \mathbf{D}_n(\mathbf{u}_c^{k*}) = -\nabla p_{c,n}^{k-1*} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1}). \quad (4.20)$$

Für das in Abschnitt 4.3.1 gegebene Beispiel ist die Impulsgleichung mit

$$\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{u}^{k*} = -\nabla p_{c,n}^{k-1*} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_n^{k-1}) \quad (4.21)$$

gegeben. Die Lösungsmatrix und ein vergrößerter Ausschnitt dieser sind nachfolgend dargestellt

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \text{KV} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \text{Zeit} & t_0 & t_1 & t_2 & t_0 & t_1 & t_2 & t_0 & t_1 & t_2 \\ 1 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 2 & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 4 & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 5 & & & & & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & & & \times & \times & \times & \times & \times \\ 6 & & & & & & \times & \times & \times & \times \\ & & & & & & \times & \times & \times & \times \\ 7 & & & & & & & \times & \times & \times \\ & & & & & & & \times & \times & \times \\ 8 & & & & & & & & \times & \times \\ & & & & & & & & \times & \times \\ 9 & & & & & & & & & \times \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \text{KV} & 1 & 2 & \dots & C \\ \text{Zeit} & t_0 & t_1 & t_2 & t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_0 & t_1 & t_2 \\ 1 & t_0 & A_{1,1}^k & d_1 & d_{-1} & A_{2,1}^k & & & \ddots & & \\ & t_1 & d_{-1} & A_{1,2}^k & d_1 & & A_{2,2}^k & & \ddots & & \\ & t_2 & d_1 & d_{-1} & A_{1,3}^k & & & A_{2,3}^k & & \ddots & \\ 2 & t_0 & A_{1,1}^k & & & A_{2,1}^k & d_1 & d_{-1} & \ddots & & \\ & t_1 & & A_{1,2}^k & & d_{-1} & A_{2,2}^k & d_1 & \ddots & & \\ & t_2 & & & A_{1,3}^k & d_1 & d_{-1} & A_{2,3}^k & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ C & t_0 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \\ & t_1 & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \\ & t_2 & & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Einträge sind hier explizit angegeben. Die Beiträge aus dem zeitspektralen Term sind in rot hinterlegt und die Nebendiagonalen aus der räumlichen Diskretisierung in grün. Insgesamt besitzt die Systemmatrix pro einzelner Gleichung eine Größe von  $[(\text{KV-Anzahl} \times (2N + 1)) \times (\text{KV-Anzahl} \times (2N + 1))]$ .

Es bildet sich eine Bandmatrix. Die Bandbreite des mittleren Bandes ist durch die Anzahl an Harmonischen gegeben. Die Blöcke auf dem mittleren Band entsprechen von der Struktur den einzelnen Blöcken aus dem BGS-Löser.

Zur Lösung des linearen Systems wird die flexible Variante des GMRES-Verfahren, auch FGMRES genannt, nach Saad [62] genutzt. Das GMRES- und FGMRES-Verfahren werden angewendet, um iterativ die Lösung dünnbesetzter, linearer Gleichungssysteme zu bestimmen. Es handelt sich bei beiden Verfahren um Krylow-Unterraum-Verfahren. Der  $k$ te-Krylow-Unterraum  $\mathcal{K}_k$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  und eines zugehörigen Vektors  $\mathbf{b}$  ist mit  $\mathcal{K}_k(\mathbf{b}, \mathbf{A}) := \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}\}$  gegeben. Um die Lö-

sung des linearen Systems zu bestimmen, wird im GMRES-Verfahren die Norm des Residuums  $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0\|_2$  mit der Startlösung  $\mathbf{x}_0$  im Krylow-Unterraum minimiert. Die orthogonale Basis des Krylow-Raums kann mit dem Arnoldi-Verfahren berechnet werden. Im Gegensatz zum GMRES kann beim FGMRES die Vorkonditionierungsmatrix in jedem Schritt aktualisiert werden. Diese Flexibilität bietet vor allem Vorteile bei der Entwicklung robuster Algorithmen für parallele Rechner. Allerdings benötigt der FGMRES im Vergleich zum GMRES mehr Speicher, da zusätzliche Vektoren auf der Platte abgelegt werden müssen.

Der FGMRES-Löser bietet den Vorteil nicht auf diagonale Dominanz angewiesen zu sein und die einzelnen Kollokationspunkte und die räumlichen Ableitungen stark zu koppeln. Zur Vorkonditionierung des Systems wird eine inkomplette LU-Zerlegung (iLU) in zwei Variationen verwendet. Da die Nummerierung der Matrix einen entscheidenden Einfluss auf die Effizienz des Vorkonditionierers hat, wird das System mit dem Cuthill-McKee-Algorithmus vorsortiert [62]. Dieser Algorithmus hat das Ziel die Bandbreite der Matrix zu reduzieren. Der Cuthill-McKee-Algorithmus ist als Funktion im Strömungslöser vorhanden.

Bei der ersten Variante des Vorkonditionierers sind die zeitspektralen Terme nicht in der Vorkonditionierungsmatrix enthalten. Diese Terme werden erst im FGMRES-Löser berücksichtigt. Die Sortierung der Lösungsmatrix im Strömungslöser erfolgt nach den Nachbarschaftsbeziehungen der KV-Oberflächen. Benachbarte KV liegen im Speicher zusammen. Durch die zeitspektrale Diskretisierung ergeben sich zusätzliche Nebendiagonalwerte. Eine andere Lokalisierung der Nebendiagonalterme im Speicher auf Basis der Strömungslöser-Bibliotheken ist mit erheblichem Programmieraufwand verbunden. Daher erfolgt die Vorkonditionierung ohne zeitspektrale Terme und der FGMRES wird so adaptiert, dass der zeitspektrale Operator enthalten ist. Diese Lösungsstrategie wird mit der Abkürzung GMRES-DILU bezeichnet.

Es ist ersichtlich, dass die Vernachlässigung der zeitspektralen Terme im Vorkonditionierer dessen Performance herabsetzt. Daher wird noch eine zweite Variante untersucht. Bei der zweiten Variante, abgekürzt über GMRES-DILU-PETSc, werden Funktionen der offenen Bibliothek PETSc [10] genutzt. Es wird eine externe Bibliothek genutzt, da eine einfache Adaption der linearen Löser und Vorkonditionierer im Strömungslöser OpenFOAM® nicht möglich ist.

PETSc ist eine Bibliothek, die Datenstrukturen und skalierbare, parallele Funktionen zur Lösung von linearen Systemen enthält. Im Prediktor-Schritt werden die Einträge der Lösungsmatrix bandweise aus dem Strömungslöser an PETSc übergeben. Da es sich bei dem zeitspektralen Operator um eine konstante Matrix handelt, wird diese zu Beginn des Löseraufrufs übergeben und verbleibt über die Rechenzeit im Speicher. Nur die Koeffizienten aus der räumlichen Diskretisierung werden in jeder Iteration neu gesetzt. Das zeitspektrale Impulsgleichungssystem wird in PETSc mit einer inkompletten LU-Zerlegung vorkonditioniert und über einen FGMRES gelöst.

Die Lösung der Druckkorrektur-Gleichung je Kollokationspunkt erfolgt weiterhin entkoppelt im Strömungslöser.

Der Pseudocode für beide Algorithmen ist in Anlehnung an Saad [62] in dem Programm 4.3 zu sehen. Die Laufvariable für die Iterationsschleife ist  $k$ , für die Impuls-komponenten  $i$  und für die Krylow-Vektoren  $j$ . Beide Varianten der Vorkonditionierung unterscheiden sich nur in der Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$  in Zeile 7.

<code>//Druckkorrektur-Iteration</code>	1
<b>for</b> $k = 1, \dots, K$ <b>do</b>	2
<code>//Iteration über die Impulskomponenten</code>	3
<b>for</b> $i = 1, \dots, 3$ <b>do</b>	4
Berechne $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}_0, \beta = \ \mathbf{r}_0\ _2$ , und $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\beta$	5
<b>for</b> $j=1, \dots, J$ <b>do</b> <code>//Krylow-Vektoren</code>	6
Berechne $\mathbf{z}_j := \mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{v}_j$ <code>//Vorkonditionierung</code>	7
Berechne $\mathbf{w} := \mathbf{A}\mathbf{z}_j$	8
<b>for</b> $l = 1, \dots, j$ <b>do</b>	9
$h_{l,j} := (\mathbf{w}, \mathbf{v}_l)$	10
$\mathbf{w} := \mathbf{w} - h_{l,j}\mathbf{v}_l$	11
<b>end for</b>	12
Berechne $h_{j+1,j} = \ \mathbf{w}\ _2$ und $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}/h_{j+1,j}$	13
Definiere $\mathbf{Z}_J := [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_J], \mathbf{H}_J = h_{l,j}$ mit	14
$1 \leq l \leq j+1; 1 \leq j \leq J$	
<b>end for</b>	15
Berechne $y_J = \operatorname{argmin}_y \ \beta e_1 - \mathbf{H}_J y\ _2$ , und $\mathbf{u}_J = \mathbf{u}_0 + \mathbf{Z}_J y_J$	16
If Residuum < Toleranz Stop.	17
<b>end for</b>	18
<code>//Iteration über die Kollokationspunkte</code>	19
<b>for</b> $n = 1, \dots, 2N+1$ <b>do</b>	20
Löse nach $\nabla p_{c,n}^k$	21
Löse Turbulenzgleichungen	22
<b>end for</b>	23
Berechne räumlich-zeitliches Residuum	24
If Residuum < Toleranz Stop.	25
<b>end for</b>	26

Programm 4.3: Pseudocode für den GMRES-DILU- und GMRES-DILU-PETSc-Löser

Eine Parallelisierung bezüglich der einzelnen Kollokationspunkte ist im Rahmen dieser Algorithmen im Prediktor-Schritt nicht mehr möglich. Die Parallelisierung erfolgt nur noch über Partitionierung der KV. Für die Ausführung des Algorithmus in der ersten Variante werden die Funktionen von OpenMPI im Strömungslöser genutzt. Innerhalb von PETSc sind parallele Funktionen auch über OpenMPI

umgesetzt. Dies ermöglicht eine einfache Anbindung des Strömungslösers OpenFOAM® an PETSc bei parallelen Rechnungen. Auch bei der zweiten Vorkonditionierung können daher die Umfänge von OpenMPI voll genutzt werden.

## 4.4 Behandlung der Turbulenzgleichungen

Bei Berechnung turbulenter Strömungen wird das SA-Turbulenzmodell zur Schließung des Gleichungssystems verwendet. Wie in Abschnitt 2.2.1 gezeigt, ist auch die Turbulenzvariable  $\tilde{v}$  direkt von der Zeit abhängig, sodass eine zeitspektrale Diskretisierung der Zeitableitung notwendig wird.

Die Transformation erfolgt analog zu Abschnitt 3.1.2. Es ergeben sich  $2N + 1$  gekoppelte Gleichungssysteme für jeden Kollokationspunkt  $n$  der Form

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N d_m \tilde{v}_{n+m} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_n \tilde{v}_n) \\ &= c_{b1} \tilde{S}_n \tilde{v}_n - c_{w1} f_{w_n} \left( \frac{\tilde{v}_n}{w_n} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left( \nabla \cdot ((v_n + \tilde{v}_n) \nabla \tilde{v}_n) + c_{b2} (\nabla \tilde{v}_n)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Variablen werden an dem jeweiligen Kollokationspunkt ausgewertet. Der dimensionslose Wandabstand  $w$  wird für jeden Kollokationspunkt einzeln berechnet, sodass auch die Verschiebung der KV aufgrund von Netzbewegung berücksichtigt werden kann. Die Diskretisierung der Zeitableitung hat keinen Einfluss auf die im Strömungslöser verwendeten Wandfunktionen. Daher können Funktionen des Strömungslösers ohne Änderungen verwendet werden.

Auch im Turbulenzmodell hat die Wahl der Löserstrategie erheblichen Einfluss auf das Konvergenzverhalten des Gleichungssystems. Der Löser der Turbulenzvariable wird deshalb auf den Löser im Prediktor-Schritt abgestimmt, d.h. bei Verwendung eines FGMRES im Prediktor-Schritt wird auch die Turbulenzvariable mit einem FGMRES unter Kopplung aller zeitlicher und räumlicher Terme gelöst. Dennoch erfolgt die Lösung der Turbulenzgleichungen im Zuge der Druckkorrektur entkoppelt von Impuls- und Druckkorrekturgleichung. In jeder neuen Druckkorrektur-Iteration werden die Einträge aus der Turbulenz auf Basis der alten Iteration in die Impulsgleichung eingefügt.



---

## 5 Beurteilung der Güte der instationären Berechnungen

In diesem Kapitel werden die Prozesse zur Bewertung der Güte numerischer Strömungsberechnungen vorgestellt. Zwei laminare Testfälle werden mit Zeitschrittverfahren und den zuvor vorgestellten zeitspektralen Lösern untersucht. Die Fehler der zeitaufgelösten Rechnungen durch räumliche und zeitliche Diskretisierung werden abgeschätzt und die grundlegenden Strukturen der Strömung identifiziert. Die Ergebnisse mit der zeitspektralen Diskretisierung werden den Ergebnissen mit Zeitschrittverfahren gegenübergestellt. Anschließend werden die zeitspektralen Lösungsstrategien hinsichtlich Konvergenzverhalten, Effizienz und Speicherbedarf bewertet.

### 5.1 Methoden zur Löserbewertung

Zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen auf beliebigen Gebieten müssen die Terme diskretisiert werden und das Rechengebiet muss in KV zerlegt werden. Zudem findet eine Linearisierung statt und die Turbulenz wird durch geeignete Modelle approximiert. Unterschiedliche Verfahren zur Lösung der gekoppelten Gleichungen haben sich etabliert. Durch die einzelnen Schritte werden verschiedene Fehler in das System eingebracht. Die Beurteilung der Ergebnisse setzt die Kenntnis dieser Fehler voraus und die Fähigkeit, die Fehler abzuschätzen. Eine Abgrenzung der Fehler zueinander hilft die Qualität der Simulationen zu beurteilen und zu prüfen, ob die geforderte Genauigkeit erfüllt wird. Nach [26] werden die Fehler unterteilt in

- Modellfehler,
- Diskretisierungsfehler,
- Iterationsfehler und
- (Programmier- und Anwenderfehler).

Unter Modellfehlern versteht man den Fehler durch Annahmen und Vereinfachungen in den Eingangsdaten und der Modellierung der Berechnung. So sind z.B. die genauen Abhängigkeiten des Fluids von Größen wie Druck, Temperatur oder Zusammensetzung nicht bekannt und es werden Annahmen z.B. bei der Turbulenz

und der Transition getroffen. Weitere Abweichungen zwischen exakter und modellierter Lösung stammen aus der Reduzierung des Gesamtsystems auf kleinere Teilsysteme. Bei Radialverdichtern werden z.B. nur einzelne Schaufelpassagen gerechnet unter Vernachlässigung des Spiralgehäuses. Dies schont die Ressourcen, aber die Wechselwirkungen zwischen den Systemen können so nicht betrachtet werden. Auch bei der Vernetzung werden komplexe Geometrien vereinfacht, um ein rechenfähiges Netz zu erzeugen [26].

Getrennt davon ergeben sich Diskretisierungsfehler durch die Approximation von Oberflächen-, Volumen- und Zeitintegralen. Die exakte Lösung der Erhaltungsgleichung weicht ab von der Lösung des diskretisierten Systems. Bei konsistenter Approximation reduziert sich die Größe des Fehlers mit der Auflösung der zeitlichen und räumlichen Dimensionen. Die lokale Auflösung der Zeitschritte muss an die Zeitableitung angepasst werden und die lokale räumliche Auflösung muss an die räumlichen Gradienten adaptiert werden. Die Ordnung des Diskretisierungsschema bestimmt die Rate, mit welcher der Fehler reduziert wird.

Weitere Fehler werden durch das vorzeitige Beenden der Berechnung verursacht. Die Lösung des diskretisierten Systems erfolgt bis zu einem vorher definierten Abbruchkriterium. Für die meisten Berechnungen im industriellen Umfeld werden die Systeme nicht bis auf Maschinengenauigkeit gelöst, sondern es ist lediglich eine Reduktion um drei bis vier Größenordnungen der Residuen vorgesehen. Die Beurteilung der Residuen erfolgt anhand einer Norm. Dazu werden entweder die L1-Norm, die Summe der absoluten Residuen, oder die L2-Norm, die Wurzel aus der Summe der Quadrate aller Elemente, genutzt. Das notwendige Abbruchkriterium ist abhängig von der Komplexität des Testfalls und wird daher fallspezifisch untersucht. Außerdem fließen Rundungsfehler durch die arithmetischen Operationen ein. Sowohl Fehler durch frühzeitigen Abbruch der Iterationen wie auch Fehler durch die arithmetischen Operationen werden unter dem Begriff Iterationsfehler zusammengefasst. Diese können untersucht werden, indem die Anzahl der Rechenschritte erhöht und die Zielgrößen bei Simulationsende mit Zwischenergebnissen verglichen werden.

Die letzte Kategorie umfasst die Programmier- und Anwenderfehler. Bei neu entwickelten und implementierten Strömungscodes ist eine ausgiebige Testphase notwendig, um auftretende Programmierfehler im Code zu identifizieren und zu beheben. Hierzu hilft auch die Analyse der Iterations- und Diskretisierungsfehler. Eine Anzahl an Berechnungsfällen, die sich sowohl in der Komplexität, als auch im Aufwand unterscheiden, werden getestet und die Lösung auf Sinnhaftigkeit untersucht. Oftmals werden auch Berechnungsfälle, bei denen eine analytische Lösung bekannt ist, verwendet. Anwenderfehler resultieren aus ungeeigneter Wahl des Nutzers von Modellen, Randbedingungen, Netz- oder Zeitauflösung.

Die Analyse der Fehler und die Beurteilung, ob die gegebene Implementierung fähig ist, ein konzeptionelles Modell auf geforderte Genauigkeit zu lösen, ist Gegenstand des Prozesses der Verifikation [61]. Mehrere Rechengitter und bei instatio-

nären Rechnungen Zeitschritte sind notwendig, um für die untersuchten Fälle den Fehler zu evaluieren. Die Ordnung der verwendeten Verfahren ist entscheidend. In Abschnitt 3.3.1 ist dargestellt, dass bei herkömmlicher Zeitdiskretisierung höhere Diskretisierungsfehler als bei der TSM zu erwarten sind.

Als ein einfaches Werkzeug zur Einschätzung des Diskretisierungsfehlers wird die Richardson-Extrapolation verwendet [59]. Die Richardson-Extrapolation ist nur gültig bei ausreichend kleinen und uniformen Gitter- bzw. Zeitschritten, monotoner Konvergenz und wenn Terme höherer Ordnung in der Reihenentwicklung des Diskretisierungsfehlers klein sind. Eine Extrapolation der Lösung kann dann über

$$f_{\text{exakt}} = f_1 + \frac{f_1 - f_2}{r^o - 1}, \quad (5.1)$$

abgeschätzt werden, wobei  $f_{\text{exakt}}$  eine bessere Approximation der Lösung darstellt und  $f_1$  die Lösung auf dem feinen Netz bzw. mit dem kleinen Zeitschritt und  $f_2$  die Lösung auf dem groben Netz bzw. mit dem großen Zeitschritt ist. Die Größe  $r = \frac{t_2}{t_1}$  stellt das Verhältnis der Gitter- bzw. Zeitschritte zueinander dar und die Ordnung der Diskretisierung ist mit  $o$  gegeben. Die Größe  $f$  kann neben z.B. Geschwindigkeits- oder Druckwerten auf einem KV auch integrale Werte, wie den Auftriebsbeiwert oder das Drehmoment eines Laufrads, darstellen. Falls die Ordnung des Diskretisierungsverfahrens nicht bekannt ist, wird diese über drei Gitter- bzw. Zeitstufen nach

$$o \approx \log \left( \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_2} \right) / \log(r) \quad (5.2)$$

abgeschätzt [60]. Eine Abschätzung des Fehlers für das feine Netz bzw. den kleinen Zeitschritt wird mit

$$E_1 \approx \frac{\epsilon_{\text{rel}}}{r^o - 1} \quad (5.3)$$

und für das grobe Netz bzw. den großen Zeitschritt mit

$$E_2 \approx \frac{r^o \epsilon_{\text{rel}}}{1 - r^o}. \quad (5.4)$$

berechnet. Die relative Abweichung zwischen dem feinen und dem groben Netz-/Zeitschritt berechnet sich nach

$$\epsilon_{\text{rel}} = \left| \frac{f_2 - f_1}{f_1} \right| \quad (5.5)$$

und die absolute Abweichung berechnet sich nach

$$\epsilon_{\text{abs}} = |f_2 - f_1|. \quad (5.6)$$

Um Unsicherheiten in der Lösung gerecht zu werden und einen einheitlichen Standard zur Bewertung von Konvergenzstudien zu haben, schlägt Roache [60] die Einführung von Sicherheitsfaktoren vor. Aus der Multiplikation des Fehlers  $E$  mit einem Sicherheitsfaktor  $F_S$  leitet sich der Grid Convergence Index (GCI) her. Dieser ergibt sich formal zu  $GCI = F_S|E|$ . Roache merkt auch an, dass die Erweiterbarkeit des Verfahrens auf spektrale und pseudo-spektrale Verfahren nicht klar ist. Andere Extrapolationsmethoden sind für diese Verfahren notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Methode daher nicht verwendet, sondern es werden die relativen Abweichungen betrachtet.

Dem Prozess der Verifikation schließt sich der Prozess der Validierung an [2]. Unter der Validierung versteht man die Abschätzung der Abweichung zwischen einem Modell und der Realität. Eine Validierung erfolgt immer auf Basis experimenteller Daten. Die Akquise von experimentellen Daten und die Auswertung der Daten, sodass eine sichere Basis zur Validierung der Rechnungen gegeben ist, ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Es soll jedoch nachgewiesen werden, dass die Diskrepanz zwischen zeitaufgelösten und zeitspektralen Rechnungen in Abhängigkeit der Fragestellung vernachlässigbar ist und dass wenige Moden ausreichen, um die grundlegenden zeitlichen Strukturen aufzulösen.

## 5.2 Simulationsmodelle

Nachfolgend werden die zeitspektralen Implementierungen an einem analytischen Berechnungsfall geprüft. Anschließend werden die zeitspektralen Löser mithilfe eines zweiten laminaren Berechnungsfalls gegenübergestellt.

### 5.2.1 Couette-Strömung

Die Strömung zwischen zwei konzentrisch angeordneten Zylindern wird analysiert. Zunächst wird eine stationäre Strömung berechnet. Dieser Fall wurde gewählt, um die Implementierung der TSM zu überprüfen. Der zeitspektrale Kopplungsterm muss im Grenzfall eines stationären Problems Null sein und die Kollokationspunkte sind entkoppelt. Im zweiten Berechnungsfall wird ein instationäres Problem mit mehreren Anregungsfrequenzen mit einem Zeitschrittverfahren und den zeitspektralen Lösern berechnet.

In dem ersten Berechnungsfall wird der innere Zylinder mit einer festen Geschwindigkeit rotiert. Je nach Geschwindigkeit des Zylinders bilden sich unterschiedliche Strömungsstrukturen aus. Andereck, Liu und Swinney [4] zeigen in ihrer Arbeit, dass bei einem festen äußeren Zylinder bis zu  $Re = 100$  des inneren Zylinders eine Couette-Strömung auftritt. Bei der Couette-Strömung befinden sich die Druckkräfte

und die viskosen Kräfte im Gleichgewicht. Durch zweifache Integration des Kräftegleichgewichts ergibt sich die exakte Lösung über

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r} \text{ mit } A = \frac{u_2 r_2 - u_1 r_1}{r_2^2 - r_1^2} \text{ und } B = u_1 r_1 - Ar_1^2, \quad (5.7)$$

$$p(r) = \frac{A^2 r^2}{2} + 2AB \log(r) - \frac{B^2}{2r^2} + C, \quad (5.8)$$

wo  $u(r)$  die Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Radius,  $A$ ,  $B$  und  $C$  Integrationskonstanten,  $u_1$  und  $u_2$  die Geschwindigkeit des inneren bzw. äußeren Zylinders,  $r_1$  und  $r_2$  der Radius des inneren bzw. äußeren Zylinders und  $p(r)$  der Druck über den Radius sind. Die Randbedingungen für den ersten Testfall sind Tabelle 5.1 zu entnehmen.

In dem zweiten Testfall wird der innere Zylinder mit einer oszillierenden Sinusschwingung der Form

$$\sum_{j=1}^3 a \cdot \sin(2\pi j \cdot ft) \quad (5.9)$$

mit der konstanten Amplitude  $a$  bewegt. Die Randbedingungen für diesen Berechnungsfall sind ebenfalls in Tabelle 5.1 zu sehen. Beide Strömungen sind laminar.

Berechnungsfall 1				
$r_1$ (m)	$r_2$ (m)	$Re$	$f$ (Hz)	
0,35	1	100	$1,91e-3$	
Berechnungsfall 2				
$r_1$ (m)	$r_2$ (m)	$Re$	$\max(f)$ (Hz)	$a$ (Grad)
0,35	1	300	$5,7e-3$	5

Tabelle 5.1: Berechnungsparameter für die Strömung zwischen zwei Zylindern

Für die Simulation wird ein 2D-Modell aufgesetzt. Die Vernetzung erfolgt mit dem blockstrukturierten Vernetzer BlockMesh aus OpenFOAM®. Das Berechnungsgebiet ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Insgesamt besteht das Netz aus 10.000 Elementen. An den Rändern sind feste Geschwindigkeiten und Druckgradienten von Null angelegt. Der erste Testfall wird mit fünf Lösern berechnet. Ein stationärer Löser und die vier zeitspektralen Löser werden genutzt. Bei dem stationären Löser wird die Bewegung auf den Rändern aufgeprägt. Bei den zeitspektralen Lösern wird jeweils eine Harmonische verwendet. Alle Löser nutzen die gleichen räumlichen Diskretisierungsschemata und Einstellungen bei den linearen Lösern für eine hohe Vergleichbarkeit. Zur Lösung des Gleichungssystems ist der Unterrelaxationsfaktor der

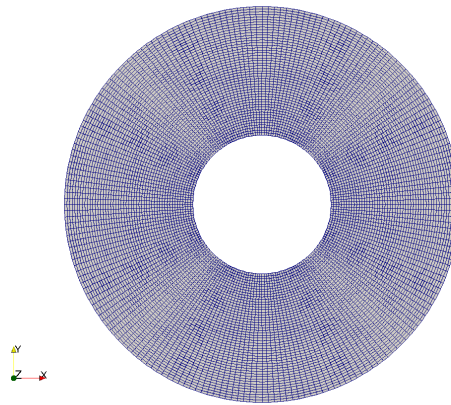


Abbildung 5.1: Berechnungsgebiet der Couette-Strömung

Geschwindigkeit zu  $\alpha_u = 0,7$  gesetzt. Die Simulationen werden abgebrochen bei einem äußeren Residuum (L1-Norm) kleiner  $1e-6$ .

In Abbildung 5.2 sind der exakte Druckkoeffizient ( $\frac{p-p_\infty}{0,5\rho u_1}$ ) und die relativen Fehler  $\epsilon_{rel}$  der Löser zur exakten Lösung über dem Radius aufgetragen. Die zeitspektralen Löser können die exakte Lösung mit einer Harmonischen gut wiedergeben. Der Grenzfall der stationären Strömung wird mit allen zeitspektralen Lösern getroffen ohne das Konvergenzprobleme zu beobachten sind.

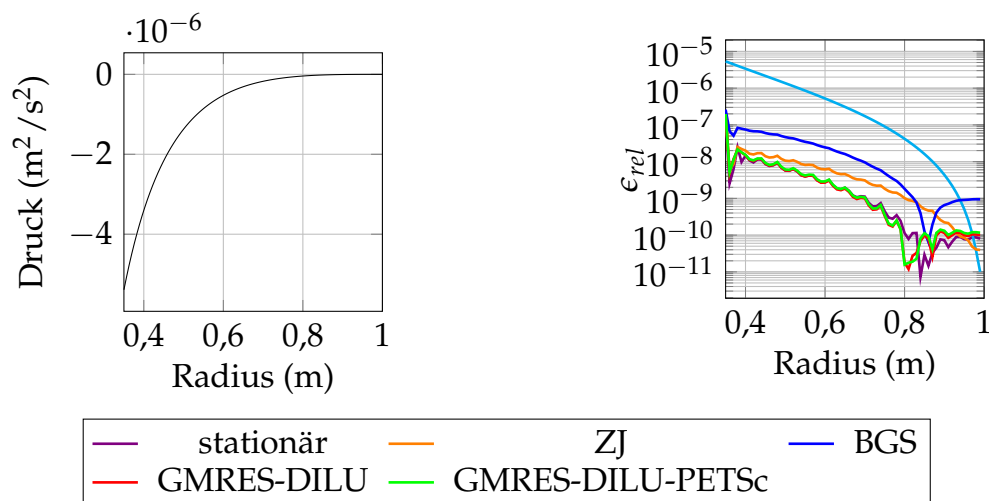


Abbildung 5.2: Links: Exakt berechneter Druckkoeffizient über den Radius; Rechts: Relativer Fehler  $\epsilon_{rel}$  des Drucks für den stationären und die vier zeitspektralen Löser (ZJ, BGS, GMRES-DILU, GMRES-DILU-PETSc) über den Radius

Nun wird die instationäre Strömung untersucht. Es wird ein instationärer Löser mit Starrkörperrotation zur Berechnung der Strömung genutzt. Die  $Co$ -Zahl im vorlie-

genden Berechnungsfall ist für den instationären Löser zu  $Co = 1$  gesetzt. Die zeitspektralen Löser approximieren die Strömung mit fünf, zehn und zwanzig Harmonischen. Der Unterrelaxationsfaktor in den Impulsgleichungen ist zu 0,6 gesetzt. Die Simulationen werden ebenfalls bei einem äußeren Residuum kleiner  $1e-6$  abgebrochen.

Der Druckverlauf über eine Periodendauer für die ersten drei Perioden des Zeitschrittverfahrens und einen zeitspektralen Löser ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Von einer dimensionslosen Betrachtung des Druckes wird hier abgesehen, da für diesen Berechnungsfall bei der Geschwindigkeit Nulldurchgänge auftreten und dies zu einem asymptotischen Verlauf des Druckkoeffizienten führt. Bei allen zeitspektralen Lösern resultieren ähnliche Ergebnisse für den zeitlichen Verlauf des Druckes, daher ist hier nur die Lösung eines zeitspektralen Löser mit unterschiedlicher Anzahl von Harmonischen abgebildet.

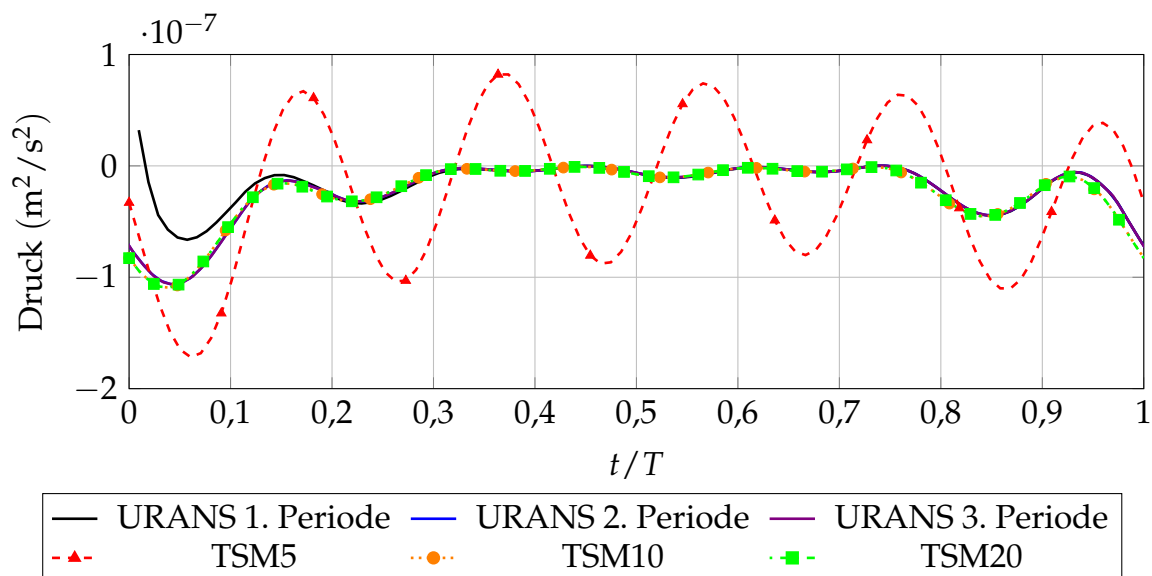


Abbildung 5.3: Druck am inneren Zylinder für die Couette-Strömung für eine Anzahl von  $N = [5; 10; 20]$  Harmonischen berechnet mit einem zeitspektralen Lösern und einem Zeitschrittverfahren.

Mit nur fünf Harmonischen kann der Druckverlauf nicht wiedergegeben werden. Aber bereits bei zehn Harmonischen liegen die Abweichungen zwischen den Ergebnissen des instationären Löser und den zeitspektralen Verfahren unter 2 %. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen zeigt sich, dass die Anzahl an äußeren Iterationen im ZJ-Löser abnehmen. Dieses Verhalten ist bei den anderen Lösern nicht beobachtbar. Dieses Verhalten des ZJ-Löser resultiert aus dessen schwacher zeitlicher Kopplung. Die zeitlichen Terme gehen mit zunehmenden Harmonischen stärker in das Gleichungssystem ein und die zeitliche Ebene gewinnt an Präsenz gegenüber der räumlichen Kopplung. Daher konvergiert der Löser mit mehr Harmonischen bei einer geringeren Anzahl äußerer Iterationen.

Wie in Abbildung 5.3 zu sehen, sind die Ergebnisse des Zeitschrittverfahrens bereits nach zwei Perioden eingeschwungen. Auf eine Gegenüberstellung der Rechenzeiten von dem Zeitschrittverfahren und den zeitspektralen Lösern wird verzichtet, da die zeitspektralen Löser wesentlich höhere Rechenzeiten durch die hohe Anzahl Harmonischer aufweisen. Ein Rechenzeitvorteil zeitspektraler Verfahren gegenüber dem Zeitschrittverfahren kann anhand dieses Berechnungsfalls nicht ausgewiesen werden. Es zeigt sich aber, dass die zeitspektralen Verfahren in der Lage sind die gleichen Ergebnisse wie die Zeitschrittverfahren zu berechnen. Zur Beurteilung der Berechnungseffizienz und der Einsatzmöglichkeiten zeitspektraler Löser werden nachfolgenden unterschiedlich komplexe Berechnungsfälle untersucht und gegenübergestellt.

### 5.2.2 Oszillierendes NACA0012-Profil

Hier wird die Strömung um ein oszillierendes NACA0012-Profil untersucht. Das Profil oszilliert um ein Viertel Sehnenlänge mit einer aufgezwungenen Amplitude  $\gamma$  von

$$\gamma = a \cdot \sin(2\pi ft), \quad (5.10)$$

wo  $a$  die maximale Amplitude der Schwingung und  $f$  die Grundfrequenz sind. Die Grundfrequenz ist über den dimensionslosen Parameter der reduzierten Frequenz

$$f_r = \frac{\pi f l}{u_\infty} \quad (5.11)$$

gegeben. In Gleichung 5.11 beschreibt  $l$  die Sehnenlänge und  $u_\infty$  die Freistömgeschwindigkeit. Die  $Re$ -Zahl wird basierend auf der Sehnenlänge und der Freistömgeschwindigkeit berechnet. Für den vorliegenden Fall sind die Berechnungsparameter Tabelle 5.2 zu entnehmen.

Parameter	$a$ (Grad)	$Re$	$f_r$
Wert	5	100	3,1416

Tabelle 5.2: Berechnungsparameter für das oszillierende NACA0012-Profil

In Abbildung 5.4 ist das Profil bei einem Anströmwinkel von  $\gamma = 0^\circ$  und der maximalen bzw. minimalen Auslenkung zu sehen. Das Netz wird über eine Starrkörperrotation mitbewegt und die Randbedingungen aufgeprägt. Die Flüsse, verursacht



durch die Netzbewegung, werden analytisch berechnet. Die Geschwindigkeit am Einflussrand wird zu  $u = u_\infty$  gesetzt. Am Austrittsrand liegt ein fester Druck an.

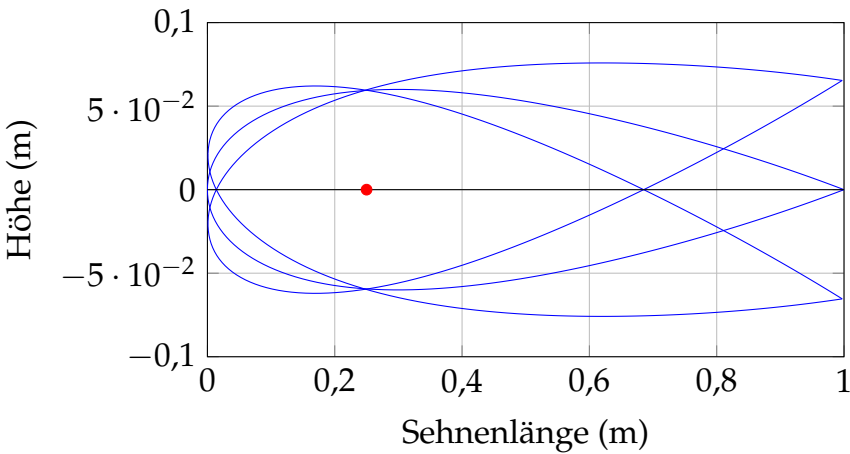


Abbildung 5.4: NACA0012-Profil bei einer Auslenkung von  $\gamma = 0^\circ$  und der maximalen bzw. minimalen Auslenkung von  $\gamma = \pm 5^\circ$

Um räumliche und zeitliche Diskretisierungsfehler zu bewerten, werden verschiedene Netze und Zeitschritte genutzt. Die Zeitschritte richten sich nach dem kleinsten KV im Netz. Bei einem feineren Netz werden daher auch die Zeitschritte kleiner. Die Zeitableitung wird mit einem Rückwärts-Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung diskretisiert. Der physikalische Zeitschritt für alle Netze und die Anzahl der KV pro Netz sind in Tabelle 5.3 zu sehen. Die verschiedenen Netzdichten sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Iterationen werden bei einem äußeren Residuum kleiner  $1e-6$  abgebrochen.

Nr.	Abkürzung	Zellanzahl	physikalischer Zeitschritt (s)						
1	grob	8.800	0,01	$4e-3$	$2e-3$	$1e-3$	$5e-4$	$2e-4$	
2	mittel	12.950	0,01	$4e-3$	$2e-3$	$1e-3$	$5e-4$	$2e-4$	$1e-4$
3	fein	35.200		$4e-3$	$2e-3$	$1e-3$	$5e-4$	$2e-4$	$1e-4$
4	sehr fein	100.000			$2e-3$	$1e-3$	$5e-4$	$2e-4$	$1e-4$

Tabelle 5.3: Netzstufen und Zeitschritte für das NACA0012-Profil

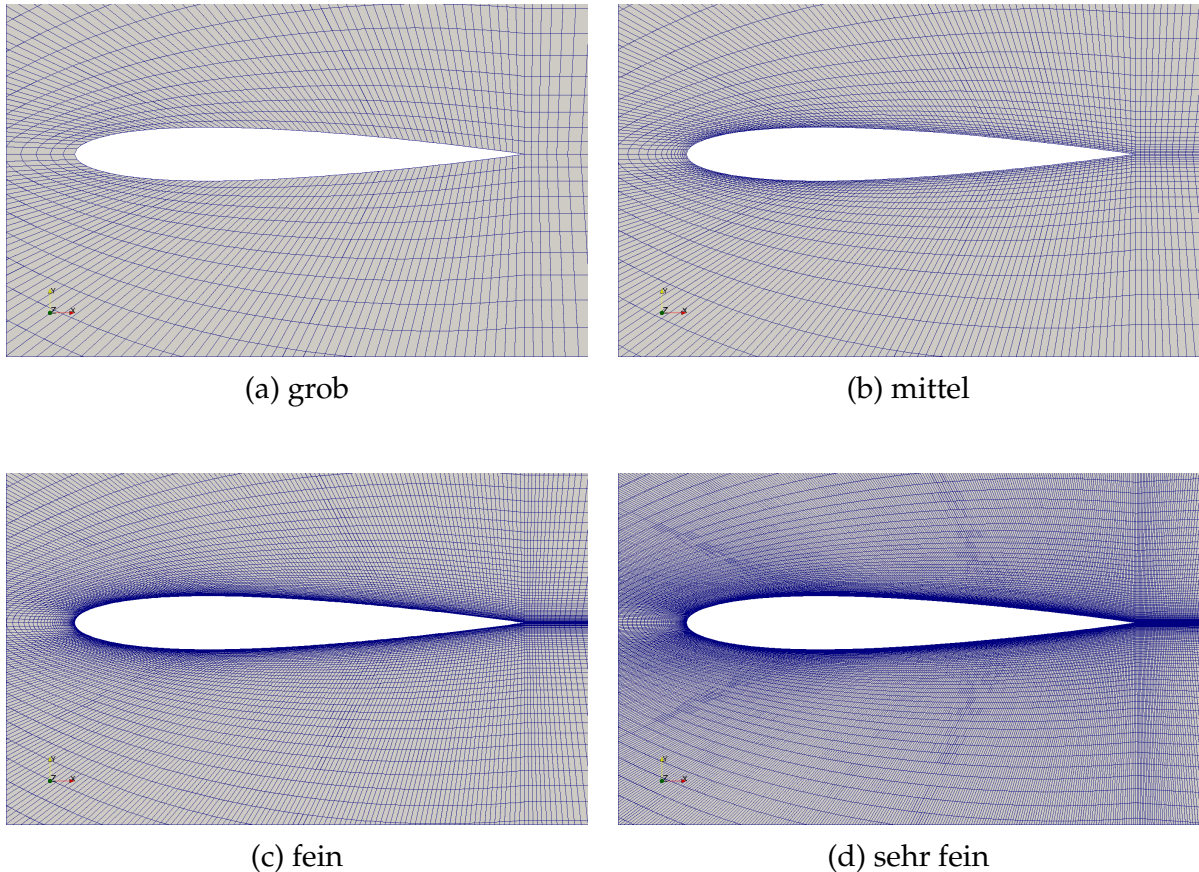


Abbildung 5.5: Netzstufen für das NACA0012-Profil

## 5.3 Bewertung der zeitspektralen Lösungsstrategien

Die in diesem Kapitel gezeigten Ergebnisse wurden teilweise bereits von Baumbach [12] veröffentlicht.

### 5.3.1 Berechnungen mit Zeitschrittverfahren

Zuerst werden die Ergebnisse mit Zeitschrittverfahren vorgestellt und analysiert, bevor auf die zeitspektralen Berechnungen eingegangen wird. Die Effizienz der Zeitschrittverfahren ist abhängig von mehreren Faktoren. Es wird zwischen drei Iterationsschleifen unterschieden: die äußere Schleife, in der die physikalische Zeit vorangetrieben wird, die Prediktor-Korrektor-Schleife und die Schleife des linearen Löser. Bei kleinen Zeitschritten steigt die Anzahl äußerer Iterationen, während die Prediktor-Korrektor-Iterationen meist reduziert werden können. Mit großem Zeitschritt nehmen wiederum die Prediktor-Korrektor-Iterationen zu.

Neben den einzelnen Iterationsschleifen muss außerdem betrachtet werden, dass eine Einschwingphase bei vielen Strömungen auftritt. Bei periodischen Strömungen

sind mehrere Perioden zu rechnen, bevor der Einfluss der Anfangsbedingungen abgeklungen ist und das System den periodischen Zustand erreicht. Dies muss auch bei der Gegenüberstellung von zeitspektralen Verfahren zu Zeitschrittverfahren beachtet werden. Die Gesamtberechnungszeit skaliert mit der Anzahl der äußeren Iterationen, den Prediktor-Korrektor-Iterationen, den Iterationen des linearen Löser und den zu berechnenden Perioden. Die äußeren Iterationen ergeben sich aus dem Zeitschritt, die Prediktor-Korrektor-Iterationen aus den Anforderungen an den Iterationsfehler innerhalb jedes Zeitschrittes und die Anzahl an Perioden ist abhängig von der Komplexität des Berechnungsfalls.

Außerdem skaliert der Rechenaufwand auch mit der Netzdichte. Um die räumlichen von den zeitlichen Fehlern zu trennen, werden unterschiedliche Zeitschrittweiten und Netzdichten untersucht. Zur Reduktion der Information aus allen Rechnungen werden die Kenngrößen des Auftriebsbeiwertes  $c_l$  und des Widerstandsbeiwertes  $c_d$

$$c_l = \frac{F_l}{\rho/2u^2 \cdot A} \quad (5.12)$$

$$c_d = \frac{F_d}{\rho/2u^2 \cdot A} \quad (5.13)$$

zur Analyse herangezogen. Der Auftriebsbeiwert und der Widerstandsbeiwert sind dimensionslose Kenngrößen für den dynamischen Auftrieb bzw. den Widerstand eines umströmten Körpers und ergeben sich als Quotient der Auftriebskraft  $F_l$  bzw. der Widerstandskraft  $F_d$  zu dem Staudruck  $\rho/2u^2$  multipliziert mit der Wirkfläche  $A$ . Beide Kräfte beinhalten die Druckkräfte und die viskosen Anteile.

Der Auftriebs- und der Widerstandsbeiwert liegen zu jedem Zeitpunkt an dem Flügelprofil vor und ändern sich in Abhängigkeit des Anstellwinkels. Zur Gegenüberstellung der Ergebnisse auf allen Netzen und mit allen Zeitschritten wird das Integral der Fourier-Transformierten über alle Frequenzen  $f$  der Beiwerte betrachtet. Die Impulsintegrale  $\hat{C}_l$  und  $\hat{C}_d$

$$\hat{C}_l = \int_{f=0}^{f_1} \int_{t=0}^T |c_l(t)| e^{-i2\pi ft} dt df \quad (5.14)$$

$$\hat{C}_d = \int_{f=0}^{f_1} \int_{t=0}^T |c_d(t)| e^{-i2\pi ft} dt df \quad (5.15)$$

werden berechnet. Für eine zuverlässige Fourier-Transformation werden in Summe zehn Perioden berechnet und die letzten Perioden zur Auswertung genutzt. Für die Transformation wird eine Frequenz von  $f = 100$  Hz verwendet, d.h. es liegen Fourier-Koeffizienten bis zu einer Frequenz von  $f_1 = 50$  Hz vor.

### Abschätzung der räumlichen und zeitlichen Abweichungen

In Abbildung 5.6 auf der linken Seite ist das Impulsintegral  $\hat{C}_I$  auf allen Netzen über den logarithmisch aufgetragenen Zeitschritt dargestellt. Auf allen Netzen laufen die Werte für abnehmende Zeitschritte zusammen. Nur auf dem mittleren Netz sind im Verlauf des Kennwertes über den Zeitschritt kleine Schwankungen erkennbar. Im rechten Diagramm ist für den jeweils kleinsten Zeitschritt das Impulsintegral über die logarithmisch aufgetragene Anzahl an KV zu sehen. Es zeigt sich ein klarer Unterschied zwischen dem groben und den restlichen Netzen. Hier tritt ungefähr eine Abweichung von 4 % auf. Die Abweichungen aus der räumlichen Diskretisierung zwischen dem mittleren, feinen und sehr feinen Netz sind vernachlässigbar.

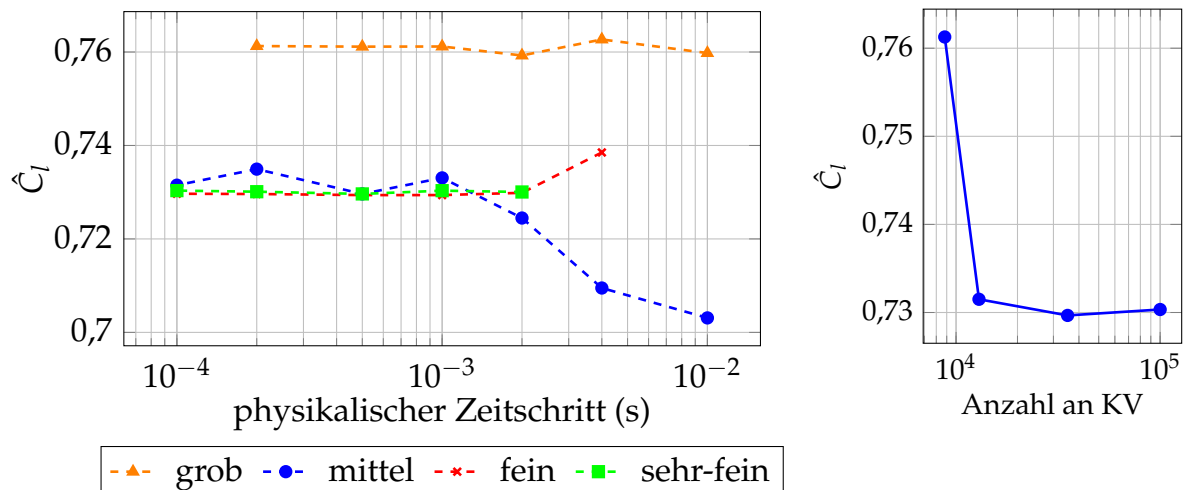


Abbildung 5.6: Links: Impulsintegral  $\hat{C}_I$  über den physikalischen Zeitschritt für alle Netzstufen; Rechts: Impulsintegral  $\hat{C}_I$  für den jeweils kleinsten Zeitschritt über die Anzahl an KV; Abb. veröffentlicht in [12]

Es ist festzuhalten, dass auf allen Netzstufen eine Reduzierung der Abweichungen aus der zeitlichen Diskretisierung mit abnehmenden Zeitschritten zu verzeichnen ist. Die Abweichungen des Kennwertes auf dem mittleren, feinen und sehr feinen Netz sind gering. Von einer Gegenüberstellung der Ergebnisse auf dem groben Netz ist auf Grund der räumlichen Abweichung abzuraten. Um den Rechenaufwand bei den zeitspektralen Berechnungen gering zu halten, werden nur das mittlere und feine Netz verwendet.

### Analyse der Periodizität

In diesem Abschnitt werden die Fragen beantwortet, wie viele Perioden nötig sind, bevor ein eingeschwungener Zustand erreicht ist und welche Moden die Strömung enthält.

Insgesamt werden zehn Zeitperioden berechnet. Die relative Abweichung zwischen dem Impulsintegral aus der letzten Periode  $\hat{C}_{l,10}$  und den jeweiligen Werten aus den  $h$ -ten Perioden  $\hat{C}_{l,h}$  werden berechnet. Die relative Abweichung  $\epsilon_{\hat{C}_{l,h}}$  wird über

$$\epsilon_{\hat{C}_{l,h}} = \left| \frac{\hat{C}_{l,h} - \hat{C}_{l,10}}{\hat{C}_{l,10}} \right| \quad (5.16)$$

evaluiert. Die relative Abweichung  $\epsilon_{\hat{C}_{l,h}}$  über die Perioden ist in Abbildung 5.7 aufgetragen. Die Abweichungen sind für den kleinsten Zeitschritt auf dem mittleren und feinen Netz ausgewertet. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Netzen sind gering. Obwohl auch nach neun Perioden immer noch Änderungen in der Lösung zu verzeichnen sind, fällt die absolute Abweichung nach vier Perioden unter 1 %. Die Rechnungen werden daher im Folgenden zur Begrenzung des Rechenaufwands nach vier Perioden angehalten.

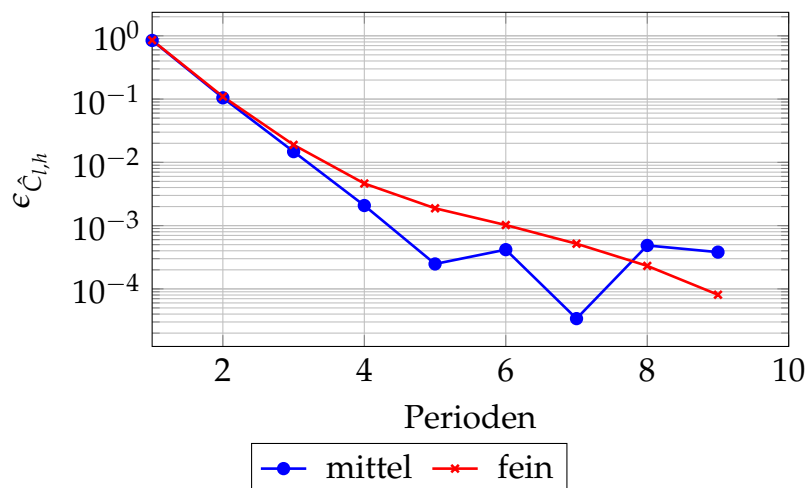


Abbildung 5.7: Relative Abweichung von  $\hat{C}_l$  über die Perioden für den kleinsten Zeitschritt

Die Voraussetzung für zeitspektrale Löser ist die Reduzierung von periodischen Strömungsproblemen auf eine kleine Anzahl Vielfacher der Grundfrequenz. Um dies zu untersuchen, werden daher die Moden innerhalb des Spektrums berechnet. Zuerst werden nur die Moden im Auftriebs- und Widerstandsbeiwert betrachtet. In Abbildung 5.8 sind die Amplituden der Fourier-Koeffizienten über der Frequenz

dargestellt. Bei dem Auftriebsbeiwert zeigt sich die größte Amplitude bei  $f = 1$  Hz und bei dem Widerstandsbeiwert bei  $f = 2$  Hz. Es sind nur Peaks bei Vielfachen der Grundfrequenz  $f = 1$  Hz zu sehen. Die Amplituden der Fourier-Koeffizienten nehmen bei Frequenzen größer  $f = 3$  Hz deutlich ab. Basierend auf diesen Ergebnissen reichen hier zwei Harmonische für den zeitspektralen Löser aus um den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert abzubilden.

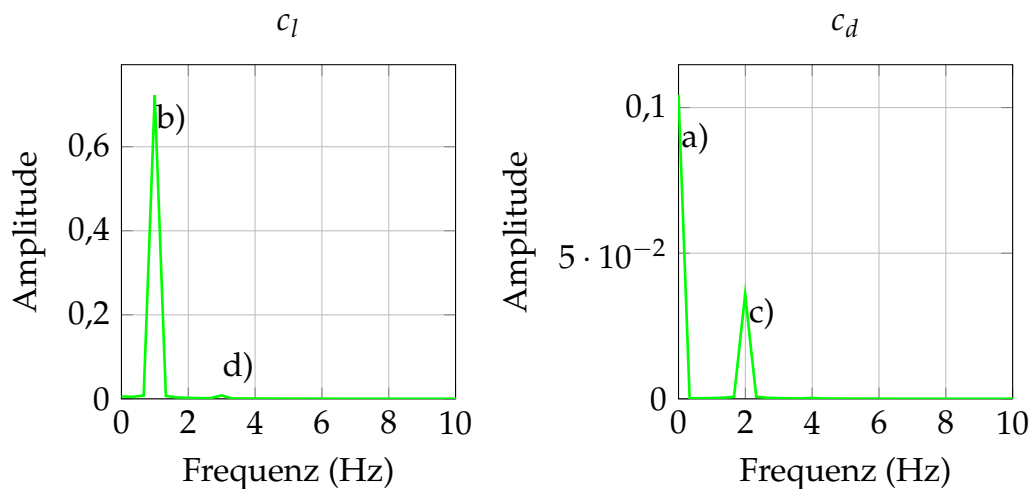
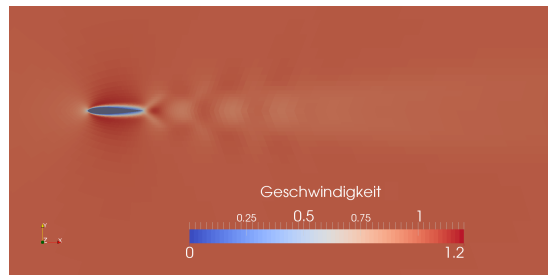


Abbildung 5.8: Fourier-Transformation des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes auf dem sehr feinen Netz bei einem Zeitschritt von  $\Delta t = 1e-4$  s und für räumliche Diskretisierung zweiter Ordnung

Die Beträge der Geschwindigkeit aller KV für die letzte Periode werden im Abstand von  $t = 0,01$  s gespeichert und die Fourier-Koeffizienten der Moden für das gesamte Strömungsfeld ermittelt. In Abbildung 5.9 sind die Real- und Imaginärteile der Moden von  $f = 0 - 4$  Hz zu sehen. Die nullte Mode in Abbildung 5.9 a) entspricht der zeitlich-gemittelten Strömung und besitzt daher keinen Imaginärteil. Die höheren Moden sind in Abbildung 5.9 b)- e) zu sehen.

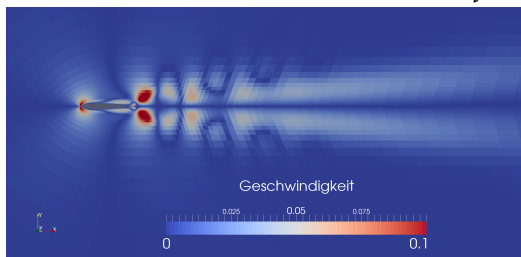
Wegen des symmetrischen Profils bilden sich auch die Moden symmetrisch zur  $x_1$ -Achse aus. Hohe Amplituden zeigen sich vor allem in der nullten Mode. Mit zunehmender Frequenz nehmen die Amplituden der Moden ab. Bei Moden größer als  $f = 3$  Hz sind auch die Amplituden am Profil gering. Höhere Moden treten nur in der Abströmung hinter dem Profil auf. Dies resultiert aus den Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Ablösewirbeln an der Hinterkante des Profils. Zur Berechnung der integralen Kennwerte zeigt die FFT der Beiwerte jedoch, dass wenige Harmonische ausreichend sind. Aus der Modalanalyse kann auch geschlossen werden, dass nur ein geringer Energieanteil in den Moden  $f > 2$  Hz vorhanden ist. Daher reichen zwei Harmonische, um das gesamte Strömungsfeld hinreichend zu repräsentieren.

a)

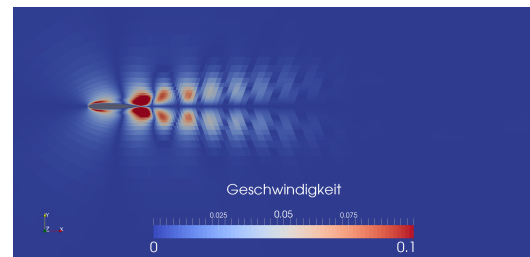


Realteil  $f = 0$  Hz

b)

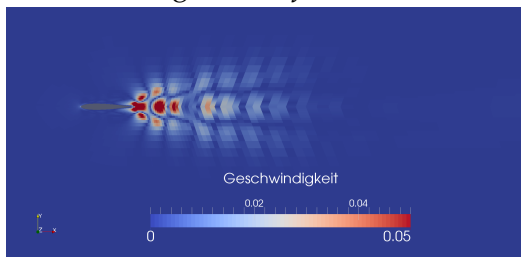


Imaginärteil  $f = 1$  Hz

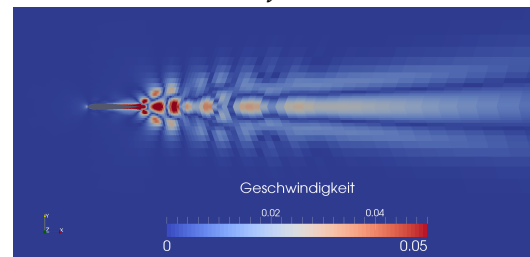


Realteil  $f = 1$  Hz

c)

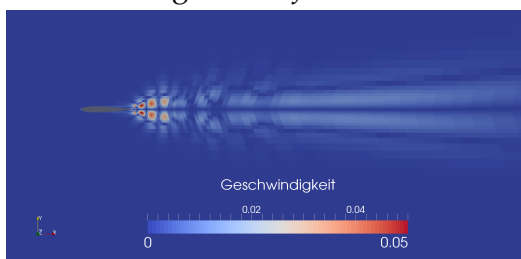


Imaginärteil  $f = 2$  Hz

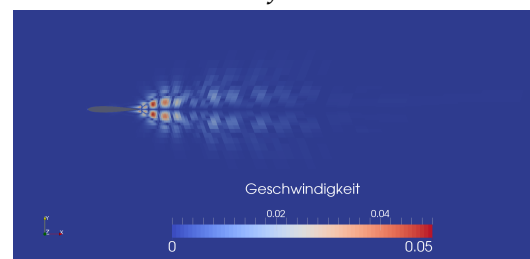


Realteil  $f = 2$  Hz

d)

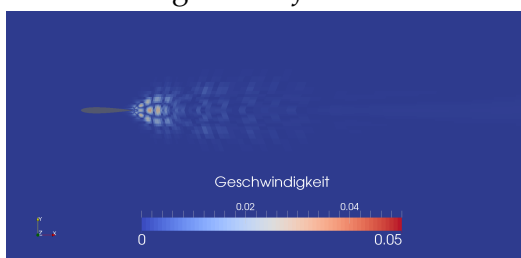


Imaginärteil  $f = 3$  Hz

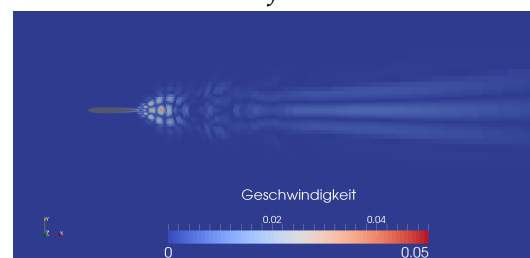


Realteil  $f = 3$  Hz

e)



Imaginärteil  $f = 4$  Hz



Realteil  $f = 4$  Hz

Abbildung 5.9: Abbildung der Real- und Imaginärteile der harmonischen Moden  $f = 0 - 4$  Hz des Betrags der Geschwindigkeit auf dem mittleren Netz für das NACA0012-Profil



### Berechnungszeit der Zeitschrittverfahren

Die gesamte Berechnungszeit der Zeitschrittverfahren wird abschließend gezeigt. In Abschnitt 2.5.1 wurde dargestellt, dass die Berechnungszeit aus den äußeren Iterationen, den Prediktor-Korrektor-Iterationen, den linearen Löser-Schleifen und den zu berechnenden Perioden zusammen gesetzt ist. Für alle Netze ist die Berechnungszeit für eine Periode auf einer CPU in Abbildung 5.10 über den Zeitschritt zu sehen. Die Berechnungszeiten der äußeren Iterationen, der Prediktor-Korrektor-Iterationen und der linearen Löser-Schleifen sind zusammengefasst. Auf dem groben und mittleren Netz wurde auf einer CPU gerechnet. Auf dem feinen und sehr feinen Netz wurde Partitionierung auf vier CPUs genutzt. Die Zeiten sind daher mit dem Faktor vier skaliert.

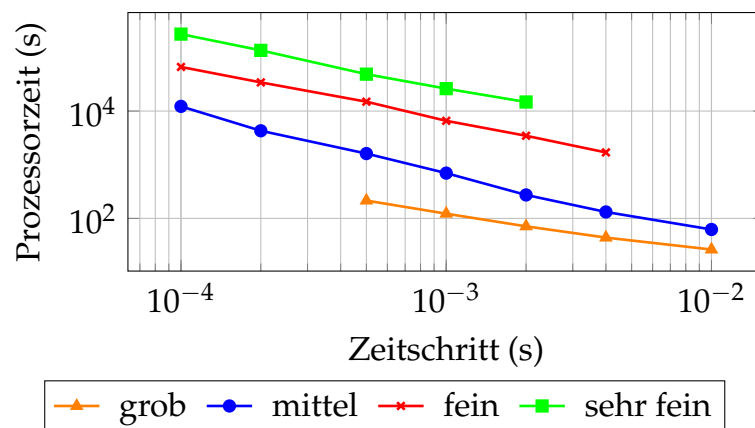


Abbildung 5.10: Berechnungszeit einer Periode für unterschiedliche Zeitschritte für das NACA0012-Profil

Der Aufwand steigt mit kleinem Zeitschritt. Zur Gegenüberstellung der Zeitschrittverfahren mit den zeitspektralen Verfahren müssen die Berechnungszeiten noch mit dem Faktor  $n_{periode} = 4$  multipliziert werden, da die Rechnungen erst nach vier Perioden eingeschwungen sind. Nur dann liefern beide Verfahren vergleichbare Ergebnisse. Durch die Partitionierung beim feinen und sehr feinen Netz ergeben sich zusätzliche Berechnungskosten auf Grund der Prozessorkommunikation. Die Gegenüberstellung der Berechnungszeiten von zeitspektralen Lösern zu Zeitschrittverfahren ist in Abschnitt 5.3.2 zu finden.

### 5.3.2 Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren

#### Gegenüberstellung der Ergebnisse mit Zeitschrittverfahren und zeitspektralen Verfahren

Nach der Darstellung der Simulationen mit herkömmlichen Zeitschrittverfahren werden nun die zeitspektralen Ergebnisse vorgestellt. Zuerst wird überprüft, ob bei-



de Lösungsmethoden ähnliche Beiwerte erzielen, bevor auf Konvergenzverhalten, Rechen- und Speichereffizienz der Löser eingegangen wird. Für das mittlere und feine Netz werden alle zeitspektralen Löser bis zu einer Anzahl von sechs Harmonischen berechnet. Die Unterrelaxationsfaktoren werden in Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens des Löser und der Anzahl an Harmonischen angepasst. Zur Vergleichbarkeit der Zeitschrittverfahren mit den zeitspektralen Lösern werden der Auftriebs- und Widerstandsbeiwert betrachtet.

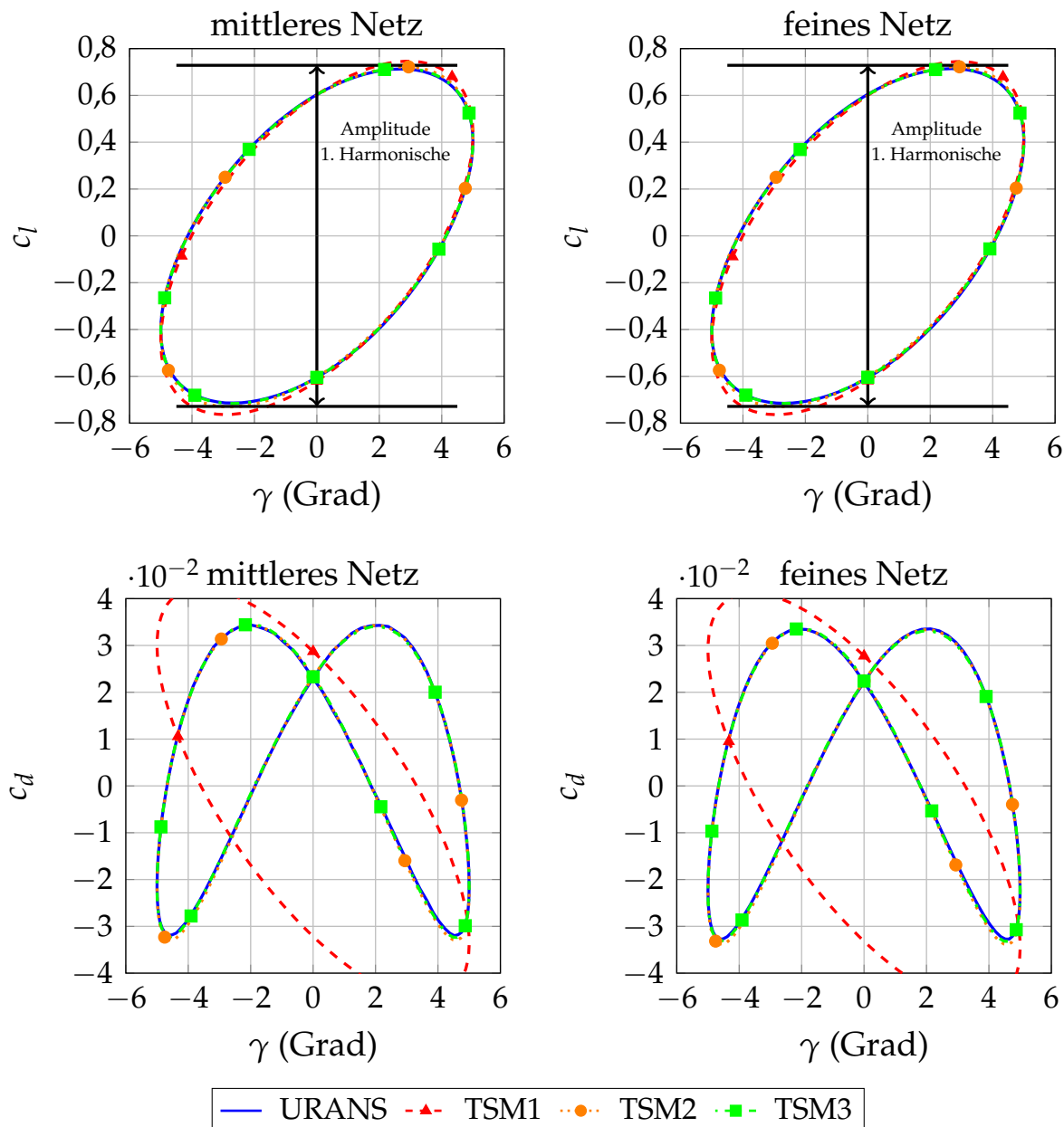


Abbildung 5.11: Gegenüberstellung des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für das mittlere und feine Netz bei räumlicher Diskretisierung zweiter Ordnung für eine Anzahl von 1 – 3 Harmonischen; Abb. veröffentlicht in [12]

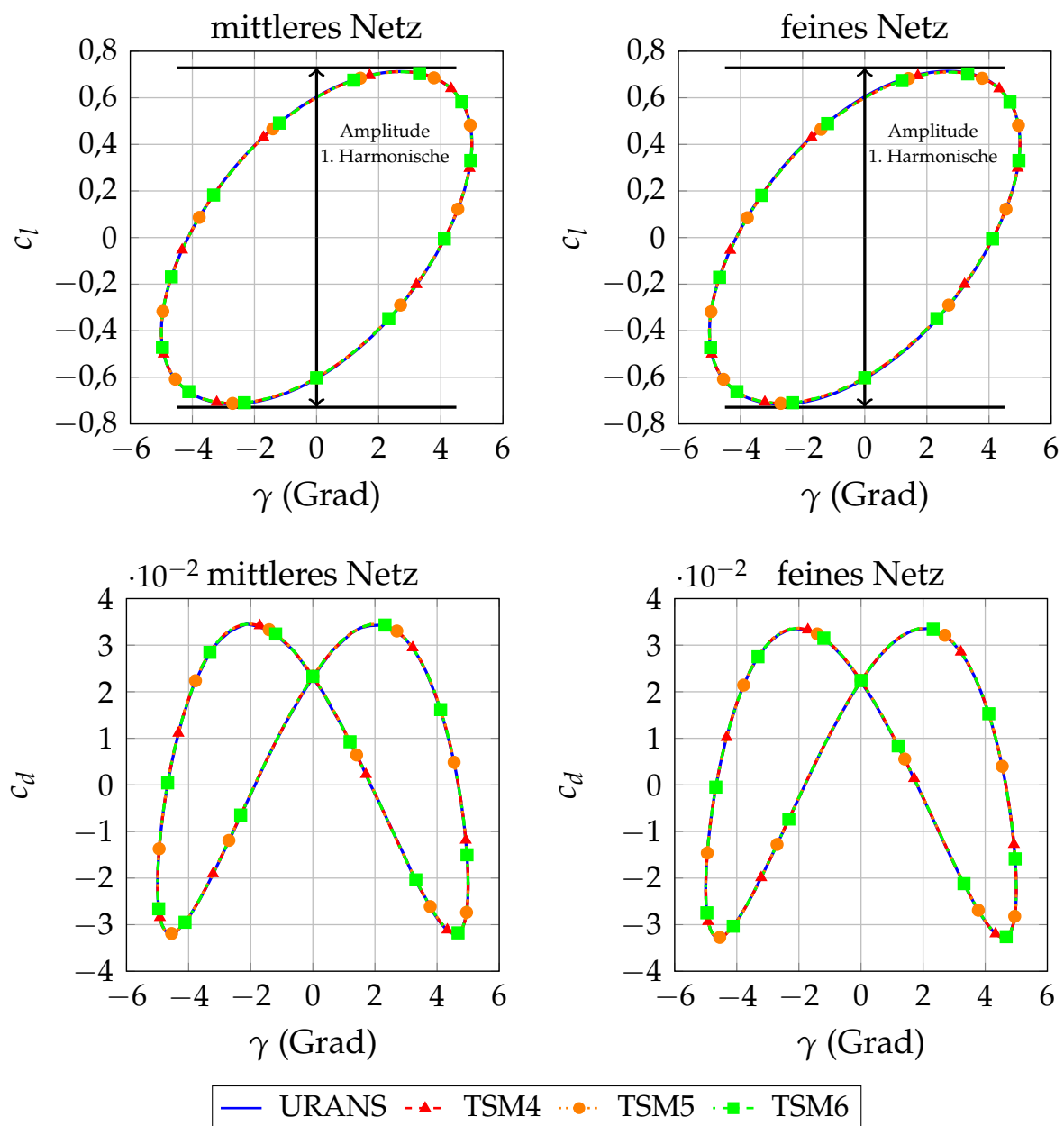


Abbildung 5.12: Gegenüberstellung des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für das mittlere und feine Netz bei räumlicher Diskretisierung zweiter Ordnung für eine Anzahl von 4 – 6 Harmonischen

In Abbildung 5.11 und Abbildung 5.12 sind die Beiwerte für die zeitspektralen Löser und die Zeitschrittverfahren über dem Anstellwinkel auf dem mittleren und feinen Netz dargestellt. Die Ergebnisse aller zeitspektraler Löser sind vergleichbar, daher werden hier stellvertretend für alle zeitspektralen Lösungsstrategien die Ergebnisse des GMRES-DILU-PETSc-Lösers gezeigt. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wird ein kontinuierlicher Verlauf der Beiwerte über den Anstellwinkel aufgetragen. Dieser Verlauf wird aus den Fourier-Koeffizienten der Kollokationspunkte berech-

net. Zusätzlich dazu sind im Verlauf vom Auftriebsbeiwert auch die Amplituden aus der Fourier-Transformation aus Abbildung 5.8 eingetragen.

Unabhängig vom Netz weicht der Widerstandsbeiwert mit einer Harmonischen von den Ergebnissen der Zeitschrittverfahren ab. Die einzelnen Kollokationspunkte liegen gut auf dem Verlauf des Widerstandsbeiwertes. Der Funktionsverlauf kann jedoch nicht abgebildet werden. Im Auftriebsbeiwert sind die höchsten Abweichungen zu Zeitschrittverfahren bei einer Harmonischen zu sehen. Allerdings ist der Verlauf über den Anstellwinkel besser repräsentiert. Ab zwei Harmonischen sind die Abweichungen zwischen zeitspektralen Verfahren und Zeitschrittverfahren in beiden Beiwerten klein. Es ergeben sich keine Unterschiede auf beiden Netzstufen. Die Ergebnisse stimmen auch mit den in Abschnitt 5.3.1 durchgeführten FFT-Analysen überein. Der Auftriebsbeiwert zeigte den höchsten Peak in der erste Harmonischen. Die Amplitude dieser wird auch mit den zeitspektralen Ergebnissen gut getroffen. Der Widerstandsbeiwert hat eine hohe Amplitude in der zweiten Harmonischen.

Um die Abweichungen zwischen Zeitschrittverfahren und zeitspektralen Verfahren qualitativ zu bewerten, werden die Impulsintegrale  $\hat{C}_l$  und  $\hat{C}_d$  betrachtet. Die relativen Abweichungen von den zeitspektralen Verfahren zu Zeitschrittverfahren sind in Abbildung 5.13 über die Anzahl an Harmonischen aufgetragen. Es zeigt sich eine Reduktion der Abweichung mit zunehmender Anzahl. Bereits mit zwei Harmonischen ist die Abweichung im Auftriebs- und Widerstandsbeiwert zwischen dem zeitspektralen und den Zeitschrittverfahren kleiner als 1 %. Bei der Berechnung des Testfalls mit mehr als sechs Harmonischen reduzieren sich die relativen Abweichungen nicht weiter. Es ist zu vermuten, dass auch die Ergebnisse der Zeitschrittverfahren noch geringe Schwankungen aufweisen und daher die Abweichungen zwischen Zeitschrittverfahren und zeitspektralen Verfahren mit mehr Harmonischen nicht weiter sinken. Außerdem zeigt sich ein unterschiedliches Konvergenzverhalten auf dem mittleren und dem feinen Netz. Die relativen Abweichungen auf dem feinen Netz liegen unterhalb der relativen Abweichungen auf dem groben Netz. Auch dies ist vermutlich auf Schwankungen aus den Ergebnissen aus den Zeitschrittverfahren zurückzuführen.

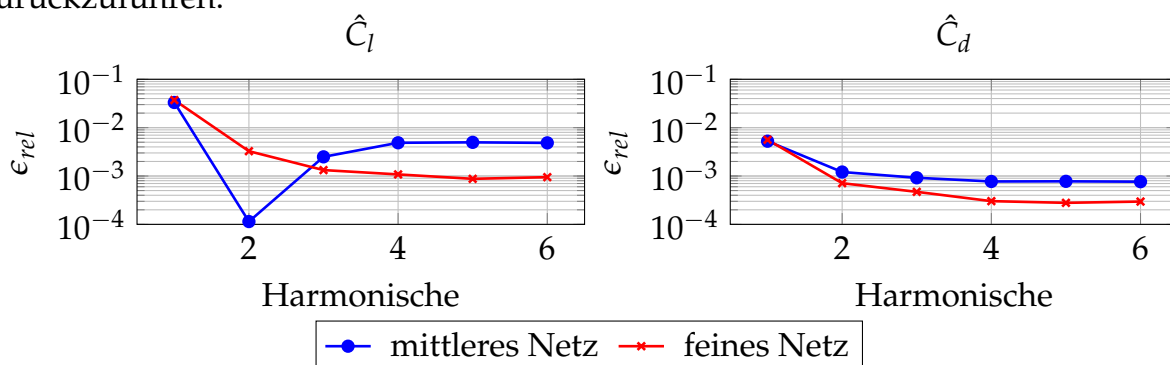


Abbildung 5.13: Relative Abweichung zwischen  $\hat{C}_l$  und  $\hat{C}_d$  aus dem zeitspektralen Löser GMRES-DILU-PETSc und aus dem Zeitschrittverfahren für das NACA0012-Profil

### Konvergenzverhalten

Gegenstand dieses Abschnittes ist das Konvergenzverhalten der zeitspektralen Löser. Zunächst werden die Residuen-Verläufe der zeitspektralen Löser auf dem mittleren und feinen Netz betrachtet und dann wird auf die notwendigen Unterrelaxationsfaktoren eingegangen. Die  $L_1$ -Norm der Residuen der äußeren Druckkorrektur-Iterationen auf dem mittleren Netz sind in Abbildung 5.14 und auf dem feinen Netz in Abbildung 5.15 dargestellt. Da der ZJ-Löser deutlich mehr Iterationen benötigt als die anderen zeitspektralen Löser, ist nur ein Ausschnitt zu sehen und der gesamte Verlauf der Residuen im unteren Teil der Abbildung dargestellt.

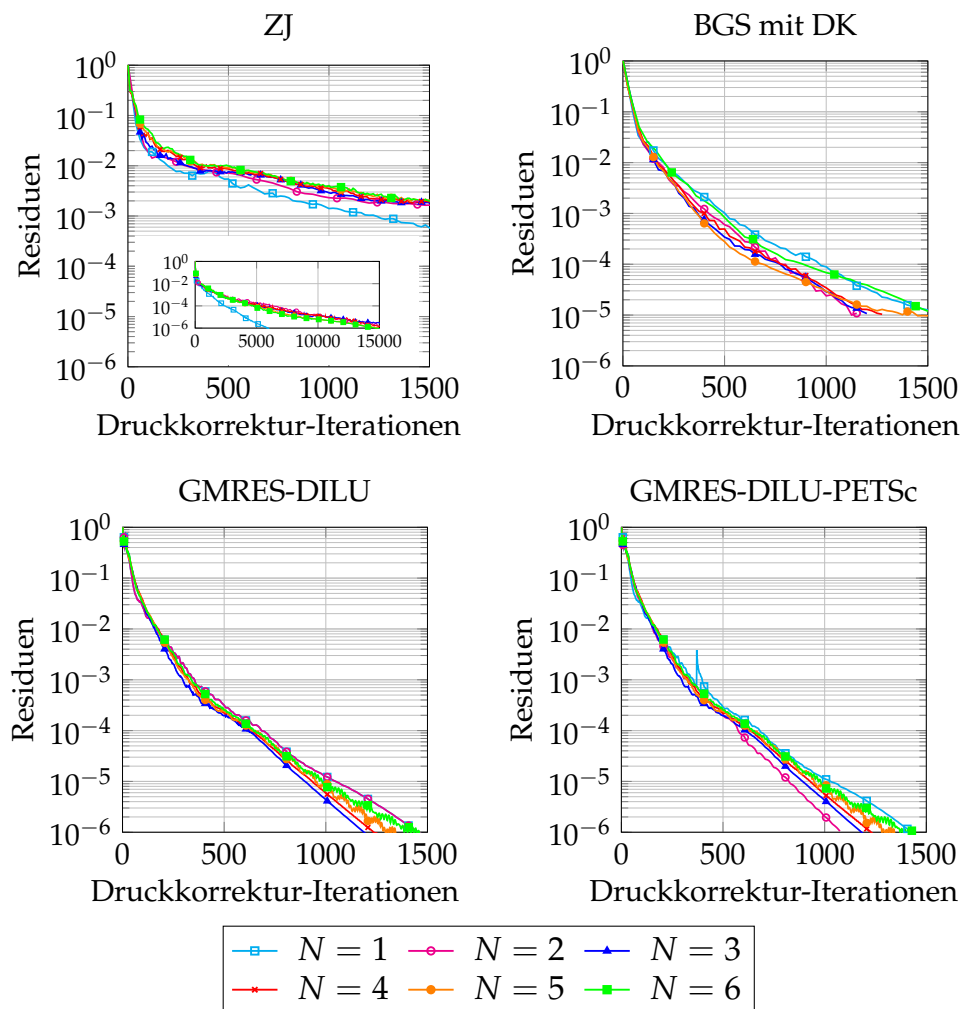


Abbildung 5.14: Residuen ( $L_1$ -Norm) der Druckkorrektur-Iterationen logarithmisch aufgetragen für die zeitspektralen Löser auf dem mittleren Netz; Abb. veröffentlicht in [12]

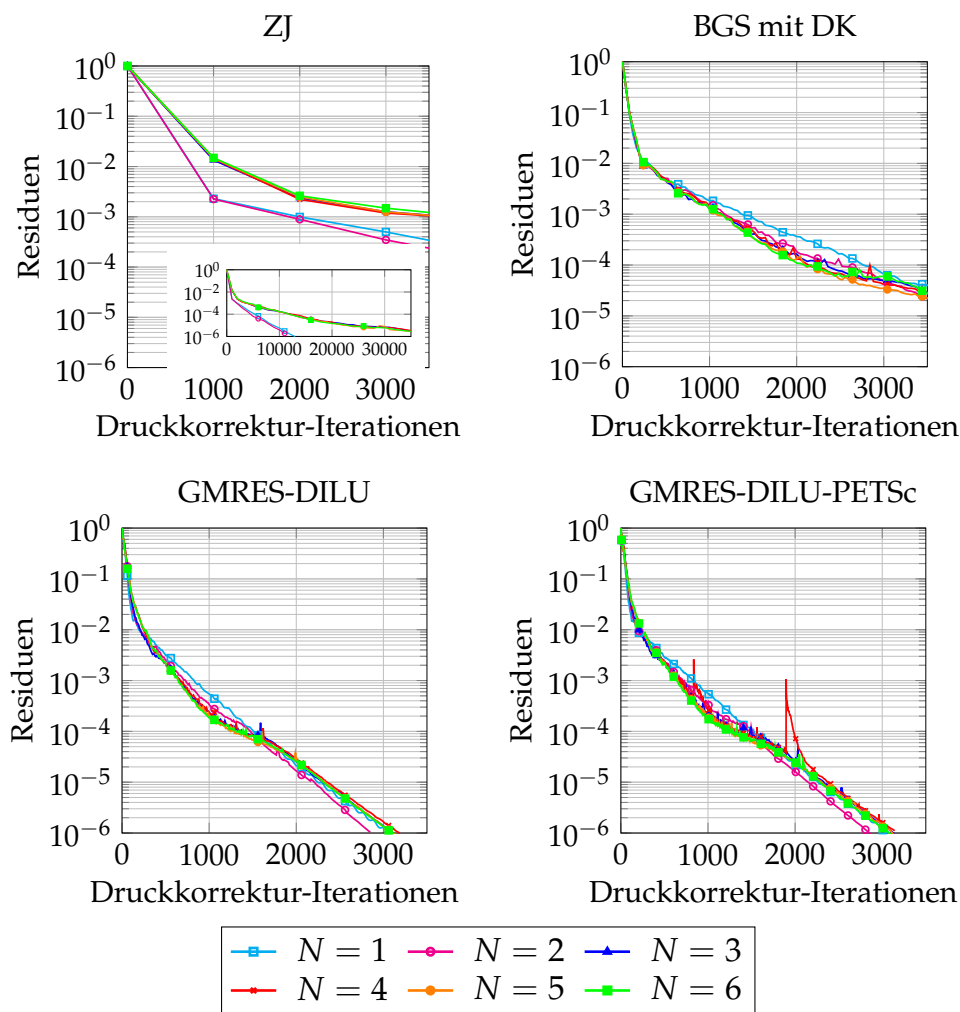


Abbildung 5.15: Residuen ( $L_1$ -Norm) der Druckkorrektur-Iterationen logarithmisch aufgetragen für die zeitspektralen Löser auf dem feinen Netz; Abb. veröffentlicht in [12]

Bei einer Harmonischen tritt bei den zeitlich-stark gekoppelten Lösern ein schlechteres Konvergenzverhalten auf. In Abbildung 5.14 ist zu sehen, dass der GMRES-DILU-PETSc-Löser mehr äußere Iterationen mit einer Harmonischen als mit sechs Harmonischen benötigt. Ein ähnliches Verhalten ist auch in den Testfällen von Anthaume [8] zu beobachten. Es ist zu vermuten, dass bei zu geringer Auflösung eines Strömungsproblems mit Harmonischen schlechteres Konvergenzverhalten bei den zeitlich stark gekoppelten zeitspektralen Lösern folgt. Bei dem ZJ-Löser zeigt sich im Residuenverlauf das Gegenteil. Das Konvergenzkriterium mit einer Harmonischen wird deutlich früher erreicht als mit mehr Harmonischen. Die schnellere Konvergenz im äußeren Residuum beim ZJ-Löser resultiert vermutlich aus der Kopplung der zeitlichen und räumlichen Terme. Die zeitliche Ableitung ist im Gegensatz zu den räumlichen Gradienten schwach gekoppelt.

Generell zeigt sich der Trend, dass die äußeren Iterationen mit der Anzahl an Harmonischen zunehmen. Der ZJ-Löser benötigt in Summe am meisten Iterationen. Der BGS-Löser erreicht im Vergleich zu den anderen zeitspektralen Lösern nur ein minimales Residuum von  $1e-5$ . Die Defektkorrektur-Schritte werden über ein zuvor definiertes Toleranzkriterium abgebrochen. Maximal sind jedoch nur 20 Defektkorrektur-Schleifen zulässig. Beim BGS-Löser wird das Toleranzkriterium der Defektkorrektur-Schritte nicht erreicht. Das bedeutet, dass die Konvergenzrate bezogen auf die Erreichung eines räumlichen Verfahrens 2. Ordnung durch eine beschränkte Anzahl an Defektkorrektur-Schritten herabgesetzt ist. Die beste Konvergenzrate zeigt sich bei dem GMRES-DILU- und dem GMRES-DILU-PETSc-Löser.

Zur Übersicht aller Rechnungen sind die Gesamtanzahl an äußeren Iterationen und die Unterrelaxationsfaktoren über die Anzahl an Harmonischen für alle zeitspektralen Löser in Abbildung 5.16 aufgetragen. Es zeigen sich klare Unterschiede in den Unterrelaxationsfaktoren. Bei voller Kopplung der zeitlichen und räumlichen Terme sind auf beiden Netzen Unterrelaxationsfaktoren von  $\alpha_u = 0,6$  möglich. Bei dem BGS-Löser muss der Unterrelaxationsfaktor auf dem feinen Netz jedoch auf  $\alpha_u = 0,4$  reduziert werden, da ansonsten kein konvergenter Simulationslauf möglich ist. Auch beim ZJ-Löser sind nur kleine Unterrelaxationsfaktoren möglich. Diese reduzieren sich zudem mit zunehmender Anzahl an Harmonischen.

Der Unterrelaxationsfaktor wird in Abhängigkeit der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung, des linearen Lösers und des Strömungsproblems gesetzt. Bei den vorliegenden Berechnungsfällen werden die gleichen räumlichen Diskretisierungsschemata genutzt, daher kann der Unterrelaxationsfaktor herangezogen werden, um den Einfluss der zeitlichen Diskretisierung auf das Konvergenzverhalten der Löser zu beurteilen. Durch die Block-Behandlung im ZJ- und BGS-Löser wird der Unterrelaxationsfaktor gemindert. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen reduziert sich die diagonale Dominanz des linearen Systems im Prediktorschritt. Um die diagonale Dominanz wieder herzustellen, wird der Unterrelaxationsfaktor reduziert. Daraus lässt sich schließen, dass der ZJ-Löser für Probleme mit vielen Harmonischen und hohen Frequenzen weniger geeignet ist. Beim dem Löser ist keine starke zeitliche Kopplung vorhanden.

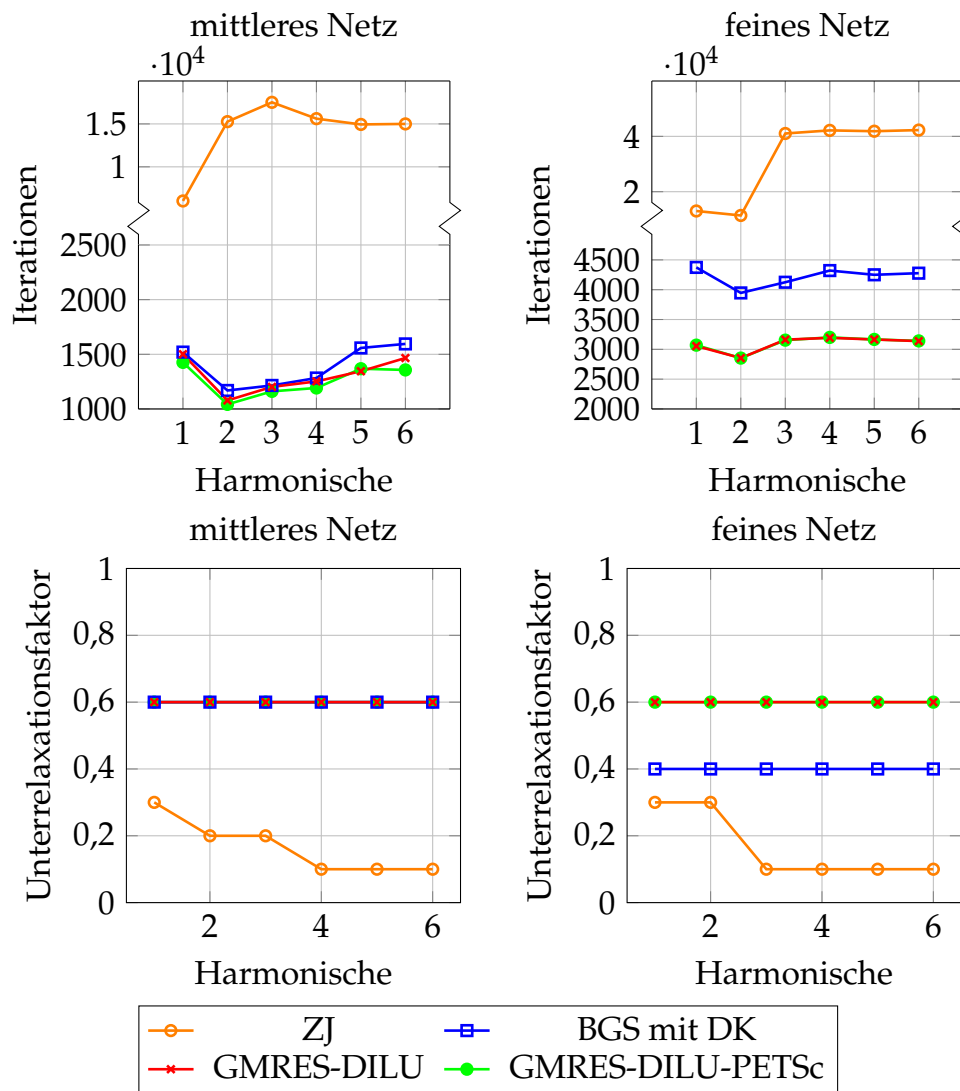


Abbildung 5.16: Anzahl an benötigten Iterationen und die Unterrelaxationsfaktoren in der Impulsgleichung über Anzahl an Harmonischen für die zeit-spektralen Löser auf dem mittleren und feinen Netz; Abb. veröffentlicht in [12]

Die Anzahl der benötigten Iterationen ist nicht allein von dem Unterrelaxationsfaktor in den Impulsgleichungen, sondern auch von der Unterrelaxation in der Druckkorrektur-Gleichung abhängig. Um den Einfluss beider Faktoren auf den Simulationslauf zu bewerten, wurden zeitspektrale Rechnungen mit einer Anzahl von  $N = 3$  Harmonischen durchgeführt und der Unterrelaxationsfaktor variiert. Die Iterationen sind über den Unterrelaxationsfaktor der Impulsgleichung  $\alpha_u$  und der Druckkorrektur-Gleichung  $\alpha_p$  in Abbildung 5.17 aufgetragen. Die Simulationen sind gekennzeichnet durch ein rotes Dreieck divergieren. Es ergibt sich ein Minimum von 823 Iterationen bei einer Wahl von  $\alpha_u = 0,6$  und  $\alpha_p = 0,4$ . Bei kleineren Unterrelaxationsfaktoren nimmt die Anzahl an Iterationen zu, dasselbe gilt für höhere Faktoren. Hinzu kommt bei hohen Unterrelaxationsfaktoren, dass die linearen Löser nicht mehr konvergieren. Festzuhalten ist, dass die Wahl der Faktoren maßgeblich die Anzahl der Iterationen und somit den Zeitbedarf beeinflussen.

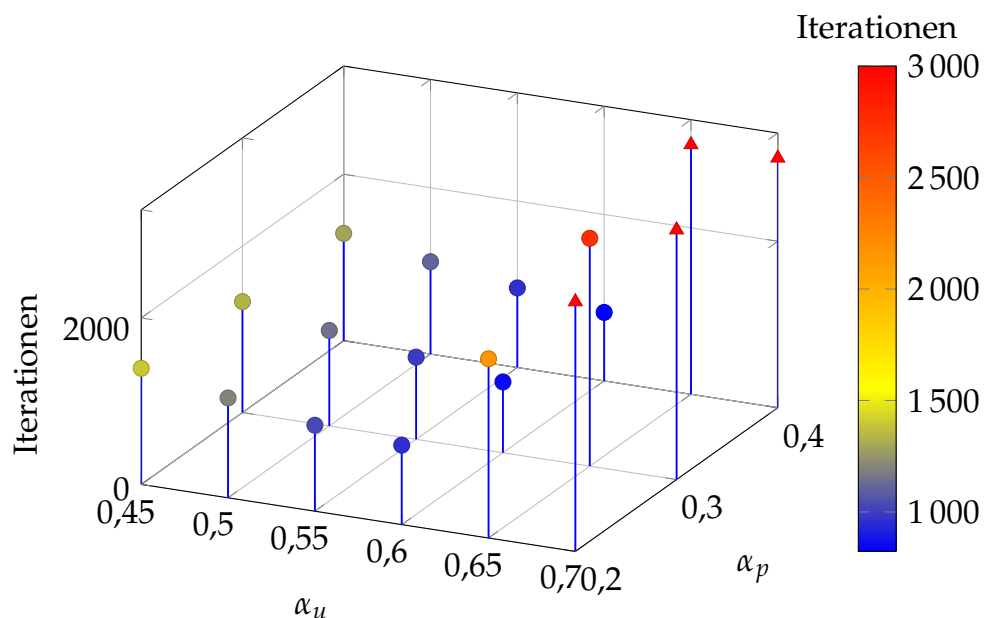


Abbildung 5.17: Äußere Iterationen in Abhängigkeit der Unterrelaxationsfaktoren in der Impuls-  $\alpha_u$  und Druckkorrektur-Gleichung  $\alpha_p$  berechnet mit dem GMRES-DILU-PETSc-Löser mit  $N = 3$  Harmonischen. Die Berechnungen markiert mit roten Dreiecken brechen frühzeitig ab.

### Speichereffizienz

Für das NACA0012-Profil ist das Verhältnis an benötigtem Speicher von zeitspektralen Verfahren zu Zeitschrittverfahren in Abhängigkeit der Harmonischen in Abbildung 5.18 dargestellt. Die Speichereffizienz sinkt mit zunehmenden Harmonischen. Den höchsten Speicheraufwand weist der GMRES-DILU-PETSc-Löser auf.



Darauf folgen GMRES-DILU-, BGS- und ZJ-Löser. Die Unterschiede im Speicheraufwand lassen sich auf Basis der Terme der Impulsgleichung erklären.

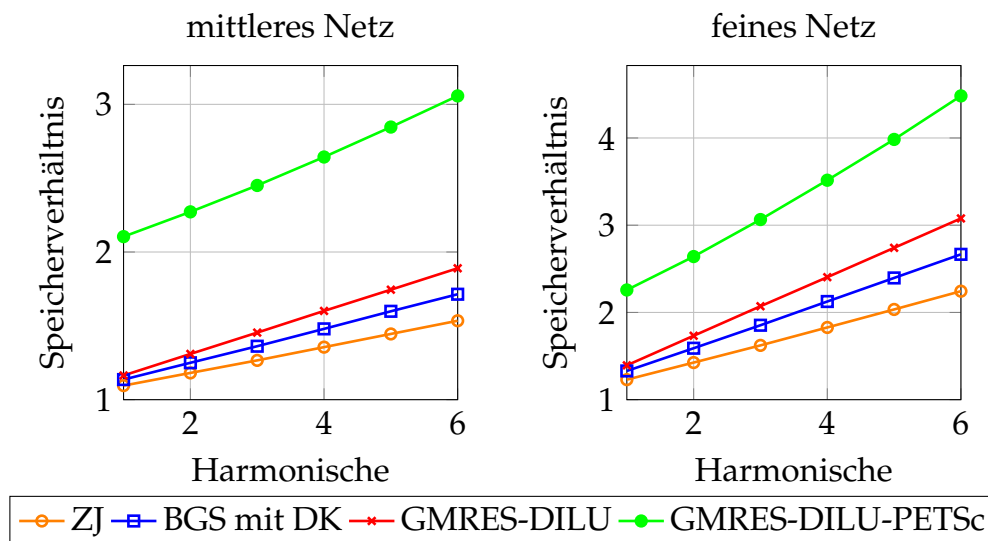


Abbildung 5.18: Speicherverhältnis der zeitspektralen Löser zu den Zeitschrittverfahren für das NACA0012-Profil

Zur Lösung der Impulsgleichung sind bei einem Zeitschrittverfahren die Hauptdiagonaleinträge  $\mathbf{A}_c$ , die Nebendiagonaleinträge  $\mathbf{A}_l$ , der Quellterm  $\mathbf{Q}$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  im Speicher. Die Hauptdiagonaleinträge enthalten auch die zeitliche Diskretisierung. Der Aufwand für die zeitspektralen Verfahren fällt höher aus. Beim ZJ-Löser müssen zusätzlich die Geschwindigkeitsfelder der Kollokationspunkte zur Berechnung des zeitspektralen Operators im Speicher verbleiben. Diese haben eine Größe von  $(2N + 1) \times \mathbf{u}$ . Durch die schwache zeitliche Kopplung des ZJ-Lösers ist es nicht notwendig alle Matrixeinträge und Quellterme aller Kollokationspunkte zeitgleich im Speicher zu haben. Für die anderen zeitspektralen Löser müssen diese jedoch gespeichert werden. Die Terme aus der zeitspektralen Diskretisierung werden beim BGS- und GMRES-DILU-Löser nicht direkt gesetzt, sondern im Vorkonditionierer bzw. Löser über Matrixmultiplikation berücksichtigt. Zusätzlich dazu müssen beim BGS-Löser die Defektkorrekturterme gespeichert werden. Die Felder werden benötigt, um die Haupt- und Nebendiagonalterme zu aktualisieren. Im Gegensatz zu dem BGS- und dem GMRES-DILU-Löser werden die Matrixeinträge aus der zeitspektralen Diskretisierung beim GMRES-DILU-PETSc gesetzt und an die externe Bibliothek übergeben. Dadurch ergibt sich zusätzlich belegter Speicher durch die Nebendiagonaleinträge. Diese haben eine Größe von  $((2N + 1)^2 - (2N + 1)) \times KV = (4N^2 + 2N) \times KV$ . Beim GMRES-Verfahren werden außerdem die vollbesetzten Basisvektoren gespeichert, daher ist der Aufwand höher als bei dem Gauß-Seidel-Verfahren [62]. Hier werden maximal 20 Krylow-Vektoren genutzt. Eine Übersicht der zu speichernden Felder kann Tabelle 5.4 entnommen werden.

Löser	Zu speichernde Felder
URANS	$\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_l + \mathbf{Q} + \mathbf{u}$
ZJ	$\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_l + \mathbf{Q} + (2N + 1) \times \mathbf{u}$
BGS mit DK	$(2N + 1) \times (\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_l + \mathbf{Q} + \mathbf{u}) + \text{DK-Terme}$
GMRES-DILU	$(2N + 1) \times (\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_l + \mathbf{Q} + \mathbf{u}) + \text{GMRES-Vektoren}$
GMRES-DILU-PETSc	$(2N + 1) \times (\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_l + \mathbf{Q} + \mathbf{u}) + (4N^2 + 2N) \times \text{KV-Anzahl} + \text{GMRES-Vektoren}$

Tabelle 5.4: Verwendeter Speicher zur Lösung der Impulsgleichung

Es ist festzuhalten, dass die zeitspektralen Löser zunehmend mit der Anzahl der Harmonischen deutlich mehr Speicherplatz als reguläre Zeitschrittverfahren benötigen. Der ZJ-Löser belegt am wenigsten und der GMRES-DILU-PETSc-Löser am meisten Speicher.

### Rechenzeiteffizienz

Abschließend wird die reale Berechnungszeit der zeitspektralen Löser mit der Berechnungszeit der Zeitschrittverfahren gegenübergestellt. Die Rechenzeit der zeitspektralen Löser über die Anzahl an Harmonischen ist in Abbildung 5.19 dargestellt. Zusätzlich dazu ist die Berechnungszeit des Zeitschrittverfahrens mit dem Zeitschritt  $dt = 1e-4$  s für insgesamt vier Perioden eingezeichnet.

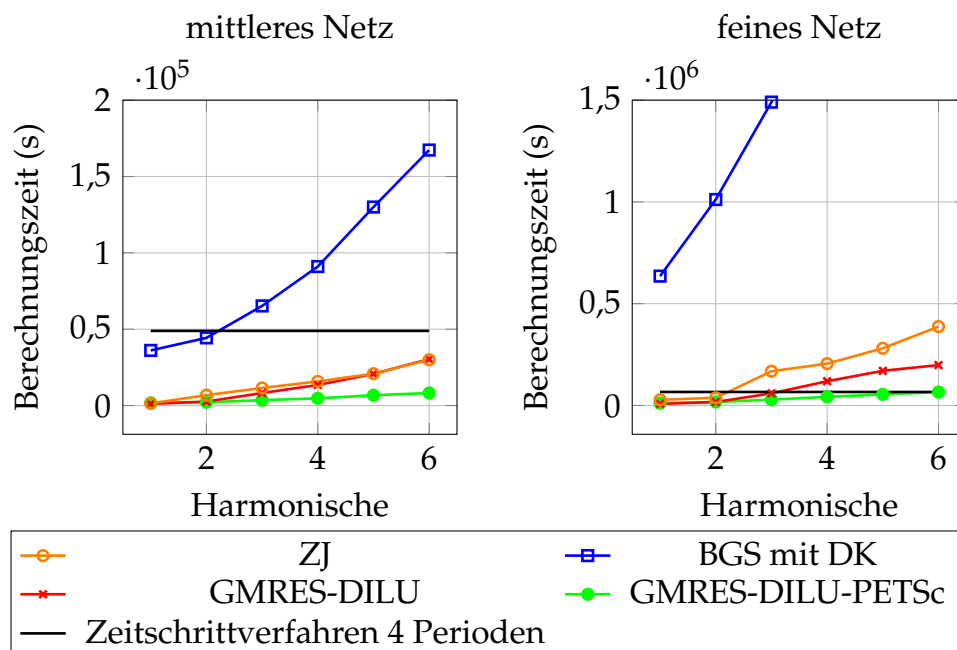


Abbildung 5.19: Gegenüberstellung der Berechnungszeit der zeitspektralen Löser und Zeitschrittverfahren für das NACA0012-Profil; Abb. veröffentlicht in [12]

Der schnellste Löser zur Berechnung des oszillierenden NACA0012-Profiles ist der GMRES-DILU-PETSc-Löser. Selbst mit sechs Harmonischen ist der Löser schneller als das Zeitschrittverfahren. Die Rechenzeiten der anderen zeitspektralen Löser liegen deutlich zurück. Bei geringen Harmonischen hat der ZJ-Löser geringe Rechenzeiten. Die Rechenzeiten nehmen jedoch mit höheren Harmonischen stark zu. Dieser Trend ist auch bei dem GMRES-DILU-Löser zu sehen. Der BGS-Löser ist wesentlich langsamer als die Vergleichslöser.

Obwohl der GMRES-DILU-PETSc- und der GMRES-DILU-Löser annähernd gleiche Iterationsschritte benötigen, ist der GMRES-DILU-Löser pro Iterationsschritt langsamer. Die Differenz in den Rechenzeiten steigt mit der Anzahl der Harmonischen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass andere Implementierungen des Vorkonditionierers und des linearen Löser genutzt werden. Außerdem sind im GMRES-DILU-Löser im Vorkonditionierer die zeitspektralen Terme nicht enthalten, daher kann dies im linearen Löser in mehr Iterationen resultieren und die Effizienz herabsetzen.

Ohne Defektkorrektur können bei dem BGS-Löser die konvektiven Terme nur mit einem Schema erster Ordnung diskretisiert werden. Mit DK sind auch höhere Schemata möglich, allerdings verlangsamt sich der Löser. Bei der DK wird das vollbesetzte zeitspektrale System je KV mehrfach gelöst. Die Rechenzeit skaliert daher mit der Anzahl der DK-Schritte. Es wird vermutet, dass durch eine Optimierung der Implementierung noch Potenzial bei diesem Löser besteht. Die Effizienz des Löser wird maßgeblich durch das Gauß-Seidel-Verfahren beschränkt. Auch bei einer überarbeiteten Implementierung des vorliegenden Löser wird dieser in Stabilität und Effizienz nicht die vollgekoppelten Löser erreichen. Es wird daher auf eine Weiterentwicklung des Löser verzichtet.

Für das gezeigte Beispiel weisen die zeitspektralen Löser mit vollgekoppelter räumlicher und zeitlicher Matrix einen Rechenzeitgewinn gegenüber dem genutzten Zeitschrittverfahren auf. Allerdings stellen sie auch wesentlich höhere Anforderungen an den benötigten Speicherplatz. Ob zeitspektrale Verfahren das Potenzial haben Zeitschrittverfahren abzulösen, muss anhand der nachfolgenden Berechnungsfälle weiter geprüft werden.

### 5.4 Abgrenzung der zeitspektralen Löser

Abschließend werden die Potenziale der einzelnen Löser kurz zusammengefasst. Die nachfolgenden Aussagen basieren auf den Erkenntnissen aus den Berechnungen der Couette-Strömung und der Strömung um das oszillierende NACA0012-Profil. Es wird unterschieden zwischen dem Konvergenzverhalten, der Rechenzeiteffizienz pro Iteration und der Speichereffizienz des Löser. In Abbildung 5.20 sind schematisch für die zeitspektralen Löser die Eigenschaften gegenübergestellt. Werte

entfernt vom Mittelpunkt sind positiv zu bewerten und Werte nah am Mittelpunkt sind negativ zu bewerten.

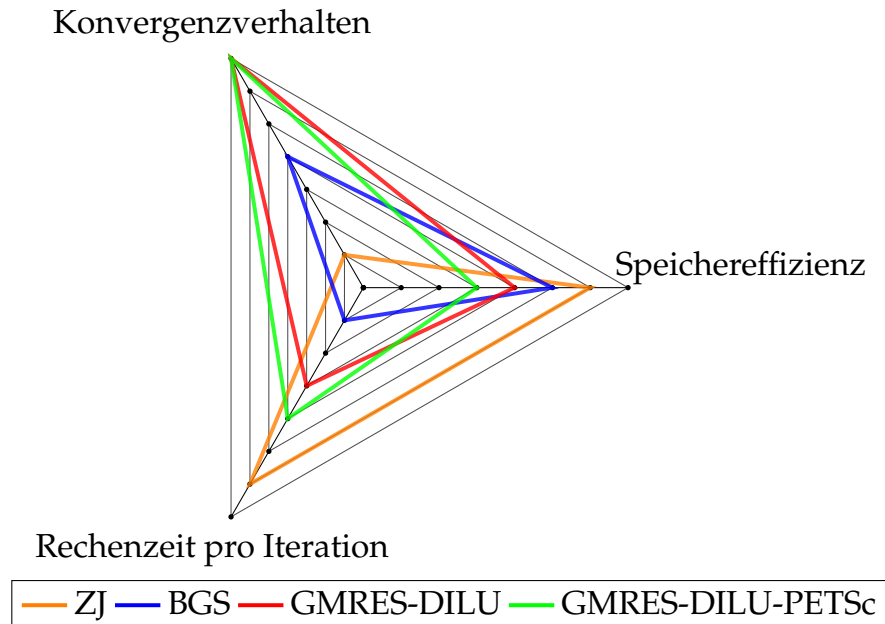


Abbildung 5.20: Schematischer Vergleich des Konvergenzverhaltens, der Speichereffizienz und der Rechenzeit pro Iteration der zeitspektralen Löser

Der ZJ-Löser zeichnet sich durch geringen Speicherbedarf und geringe Rechenzeit pro Iteration aus. Die Rechenzeiten und der Speicher sind dennoch höher im Vergleich zur instationären Rechnung. Hohe Frequenzen und viele Harmonische setzen die Konvergenzeigenschaften des Löser herab. Eine Anwendung des Löser auf Berechnungsfälle mit diesen Eigenschaften ist daher nicht empfehlenswert.

Der BGS-Löser belegt mehr Speicher, da für alle Kollokationspunkte die diskretisierten Terme der Impulsgleichung vorhanden sein müssen. Die Defektkorrektur-Iterationen, sowie aktuell implementiert, führen zu hohen Rechenzeiten, sodass der Löser trotz besserer Konvergenzeigenschaften gegenüber dem ZJ-Löser nicht zur Berechnung industrieller Anwendungsfälle geeignet ist.

Der GMRES-DILU- und der GMRES-DILU-PETSc-Löser konvergieren auch bei hohen Frequenzen und Harmonischen. Dies resultiert aus der vollen zeitlichen und räumlichen Kopplung aller Terme der Impulsgleichung. Durch diese Kopplung ist die Lösung der Impulsgleichung aufwendiger als bei dem ZJ-Löser und mehr Speicher wird belegt. Es zeigt sich, dass der GMRES-DILU-PETSc schneller ist als der GMRES-DILU-Löser. Auf Grund der geringsten Gesamtberechnungszeit und guter Konvergenzeigenschaften wird der GMRES-DILU-PETSc-Löser für die weiteren Untersuchungen genutzt.

---

## 6 Weiterführende Anwendungen

Die bisher durchgeführten Untersuchungen beschränkten sich auf 2D-Strömungsprobleme. In diesem Kapitel werden komplexere Strömungen berechnet. Dadurch werden die Potenziale und Einschränkungen der zeitspektralen Methode auch für industrienähe Anwendungen aufgezeigt. Es werden drei Berechnungsfälle simuliert: eine Profilumströmung mit höheren Frequenzen in der Anregung, ein Propeller in einer Scherströmung und ein Ventilflattern.

### 6.1 Oszillierendes NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

Die in diesem Kapitel gezeigten Ergebnisse wurden teilweise bereits von Baumbach und Stück [13] veröffentlicht.

#### 6.1.1 Modellaufbau

Im letzten Kapitel ist die Strömung um ein NACA0012-Profil untersucht worden. Das Profil wurde mit einer festen Anregungsfrequenz zwangserregt. In diesem Abschnitt wird das gleiche Profil mit einer überlagerten Sinusschwingung der Form

$$\gamma = \sum_{f=1}^3 a \cdot \sin(2\pi f t) \quad (6.1)$$

bewegt. Das Profil schwingt mit einer maximalen Amplitude  $a$  mit bis zur dritten Vielfachen der Grundfrequenz  $f$ . Die reduzierte Frequenz  $f_r$  wird aus der höchsten Harmonischen berechnet. Die Berechnungsparameter sind Tabelle 6.1 zu sehen. Der Verlauf des Anstellwinkels  $\gamma$  über eine Periode ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

Parameter	$a$ (Grad)	$Re$	$f_r$
Wert	5	100	9,4248

Tabelle 6.1: Berechnungsparameter für das oszillierende NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

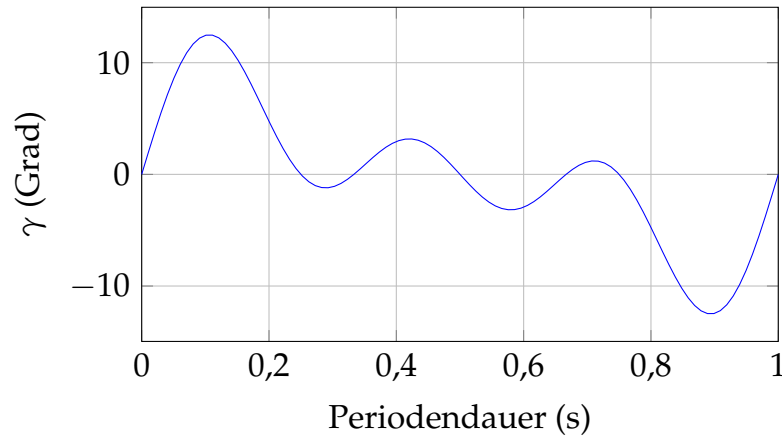


Abbildung 6.1: Anstellwinkel über Periodendauer für das NACA0012-Profil mit drei Anregungsfrequenzen

Die Berechnung erfolgt mit den Netzen aus Abschnitt 5.2.2. Auch hier wird die Bewegung des Flügelprofils über Starrkörperrotation umgesetzt. Die Randbedingungen und Fluideigenschaften sind ebenfalls analog zu Abschnitt 5.2.2 gewählt. Das Feld wird mit einer Geschwindigkeit von 0 m/s initialisiert. Eine Übersicht der verwendeten Netze und Zeitschritte ist in Tabelle 6.2 dargestellt. Trotz höherer Geschwindigkeiten handelt es sich ebenfalls um eine laminare Strömung. Die räumlichen Terme sind mit einem Stromaufwärts-Verfahren zweiter Ordnung diskretisiert. Insgesamt werden für das instationäre Zeitschrittverfahren auf jedem Netz für jeden Zeitschritt zehn Perioden gerechnet.

Nr.	Abkürzung	Zell-anzahl	physikalischer Zeitschritt ( $10^{-3}$ s)
1	grob	8.800	10 4 2 1 0,5 0,25
2	mittel	12.950	4 2 1 0,5 0,25 0,125
3	fein	35.200	2 1 0,5 0,25 0,125 0,0625
4	sehr fein	100.000	0,5 0,25 0,125 0,0625

Tabelle 6.2: Netzstufen und Zeitschritte für das NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

### 6.1.2 Berechnungen mit Zeitschrittverfahren

Nachfolgend werden die Ergebnisse des Zeitschrittverfahrens analysiert. Zunächst wird das Strömungsfeld betrachtet. In Abbildung 6.2 ist das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit  $t = 0$  s auf dem mittleren Netz im eingeschwungenen Zustand dargestellt. Es treten Geschwindigkeiten bis zu  $u = 5$  m/s auf. Hinter dem Profil sind noch die Ablösewirbel zu sehen. Durch die geringe Geschwindigkeit in  $x_1$ -Richtung bildet sich hinter dem Profil eine Rezirkulationszone aus. Die auftretenden Strömungsstrukturen sind im Vergleich zu der Strömung um das Profil aus Abschnitt 5.2.2 komplexer. Im Hinblick auf die späteren zeitspektralen Rechnungen ist zu klären, wie viele Harmonische zur Abbildung der Strömung ausreichend sind.

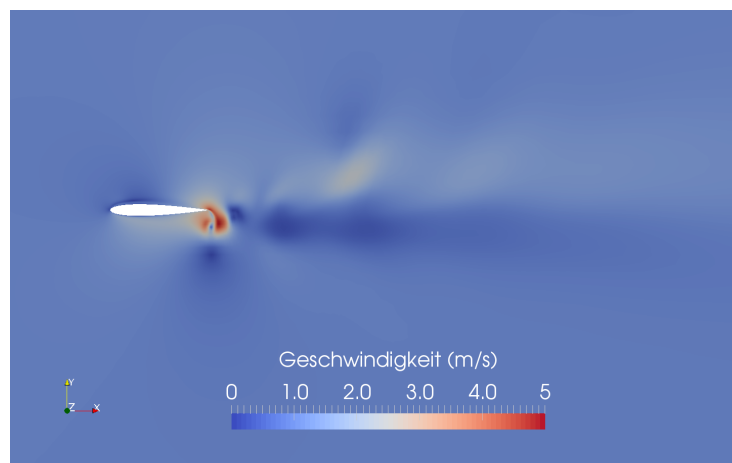


Abbildung 6.2: Geschwindigkeitsfeld zur Zeit  $t = 0$  s am NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

Es werden die Abweichungen durch die zeitliche und räumliche Diskretisierung untersucht. Die Zeitdiskretisierung nutzt ein Verfahren zweiter Ordnung mit unterschiedlichen Zeitschritten. Vier Netze werden zur Analyse des räumlichen Fehlers betrachtet. Die Bewertung der Zeitschritte und Netze erfolgt mittels des Impulsintegrals des Auftriebsbeiwertes  $\hat{C}_l$ . Die integrale Größe  $\hat{C}_l$  ist für alle Netze über die Zeitschritte in Abbildung 6.3 dargestellt.

Für jede Netzauflösung laufen die  $\hat{C}_l$ -Werte mit abnehmendem Zeitschritt zusammen und die Abweichung ist hierbei kleiner 1 %. Die Abweichungen durch die zeitliche Diskretisierung sind dadurch quantifiziert und die Simulationsergebnisse können als Referenz für die zeitspektralen Berechnungen dienen.

Zur Bewertung der räumlichen Fehler werden nur die Werte der kleinsten Zeitschritte betrachtet. Bei ausreichend kleinem Zeitschritt sind die Abweichung zwischen den  $\hat{C}_l$ -Werten auf dem feinen und dem sehr feinen Netz vernachlässigbar.

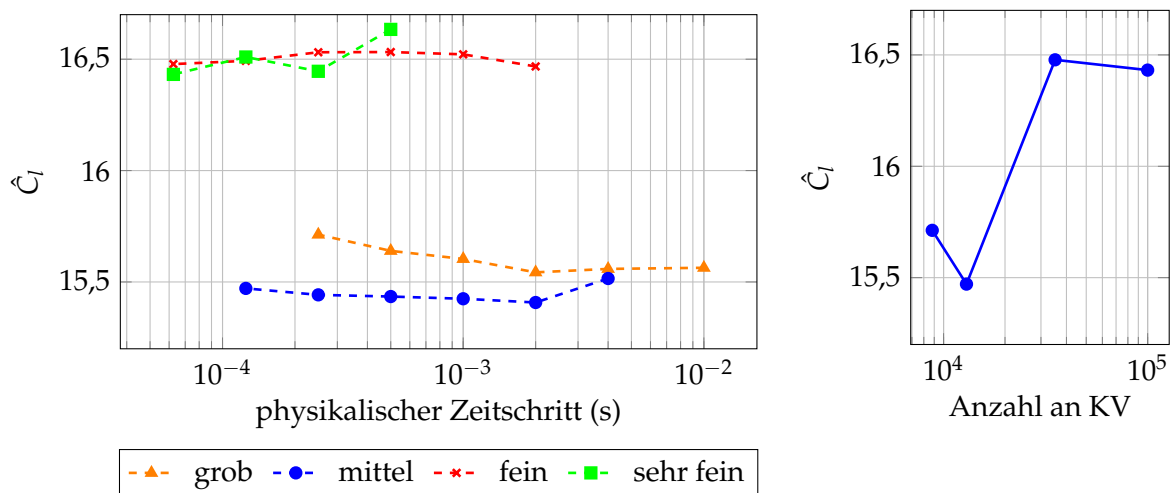


Abbildung 6.3: Links: Impulsintegral des Auftriebsbeiwertes über den physikalischen Zeitschritt für alle Netzstufen; Rechts: Impulsintegral des Auftriebsbeiwertes für den jeweils kleinsten Zeitschritt über die Anzahl an KV

Die Unterschiede in  $\hat{C}_l$  zwischen dem groben und mittleren Netz zu den Ergebnissen auf dem feinen und dem sehr feinen Netz sind höher. Die maximale Abweichung ergibt sich zwischen dem mittleren und dem sehr feinen Netz und liegt bei 6 %. Die Abweichungen der räumlichen Diskretisierung sind daher nur auf dem feinen und sehr feinen Netz vernachlässigbar.

Nachdem die Abweichungen durch die räumliche und zeitliche Diskretisierung bewertet wurden, wird nun analysiert, wann ein eingeschwungener Zustand erreicht ist. Die zehnte Periode der integralen Größe  $\hat{C}_l$  wird als Referenzwert festgelegt und die Abweichungen zu den anderen Perioden berechnet. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Die relative Abweichung ist über die Perioden aufgetragen. Eine Abweichung kleiner 1 % wird auf dem sehr feinen Netz nach neun Perioden, auf dem feinen Netz nach sechs, auf dem mittleren Netz nach drei und auf dem groben Netz bereits nach zwei Perioden erreicht. Diese Unterschiede in der Einschwingzeit ergeben sich durch numerische Diffusion. Eine höhere Netzauflösung führt zur Auflösung feinskaliger Strukturen. Diese erhöhen die Einschwingdauer.

In Abbildung 6.5 sind die Fourier-Koeffizienten des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes zu sehen. Die Verteilung der Moden und deren Amplituden sind auf allen Netzen ähnlich. Beide Kenngrößen enthalten mehrere Harmonische der Grundfrequenz. Bei dem Widerstandsbeiwert sind hohe Amplituden bis zur sechsten Harmonischen zu sehen. Im Gegensatz dazu weist der Auftriebsbeiwert nur in den ersten drei Harmonischen hohe Amplituden auf. Die Frequenzen  $f = [0; 1; 2; 4; 6; 12]$  Hz sind über die Buchstaben a-f) gekennzeichnet. Bei diesen Frequenzen werden die Real- und Imaginärteile der Strömung gesondert betrachtet.



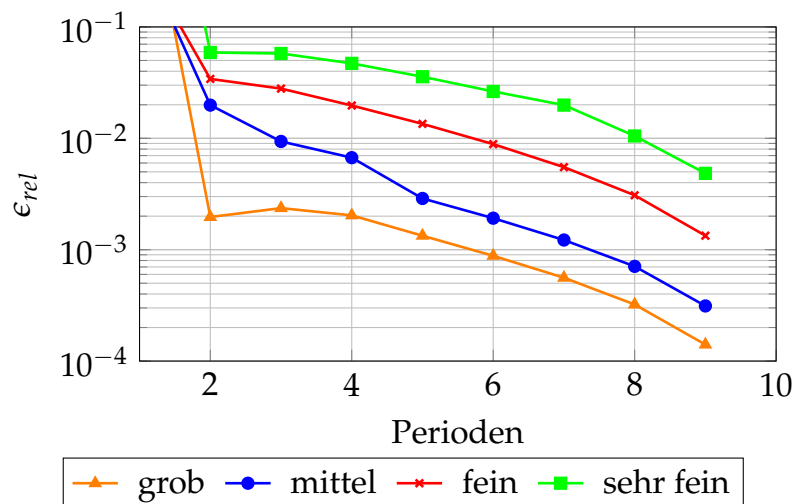


Abbildung 6.4: Relative Abweichung von  $\hat{C}_l$  auf allen Netzen über zehn Perioden für das NACA0012-Profil mit mehreren Anregungsfrequenzen

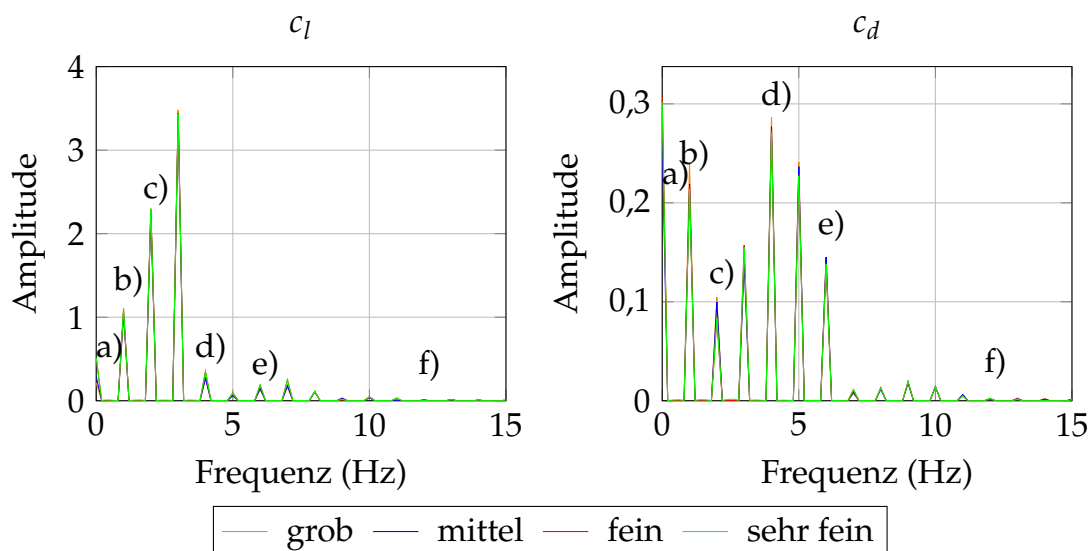


Abbildung 6.5: FFT des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für das NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

Die reellen und imaginären Teile des Betrags der Geschwindigkeit für die oben genannten Moden sind in Abbildung 6.6 visualisiert. Bei der nullten Mode handelt es sich um die zeitlich-gemittelte Strömung, daher ist für diese Mode nur der Realteil zu sehen. In Übereinstimmung mit der FFT der Beiwerte zeigt Abbildungen 6.6 a)-f), dass zur Repräsentation des Strömungsfeldes eine hohe Anzahl an Moden erforderlich ist. Vor allem im Abströmbereich tritt ein breites Frequenzspektrum auf. Erst eine Überlagerung einer Vielzahl an Harmonischen führt zu dem instationären Strömungsbild.

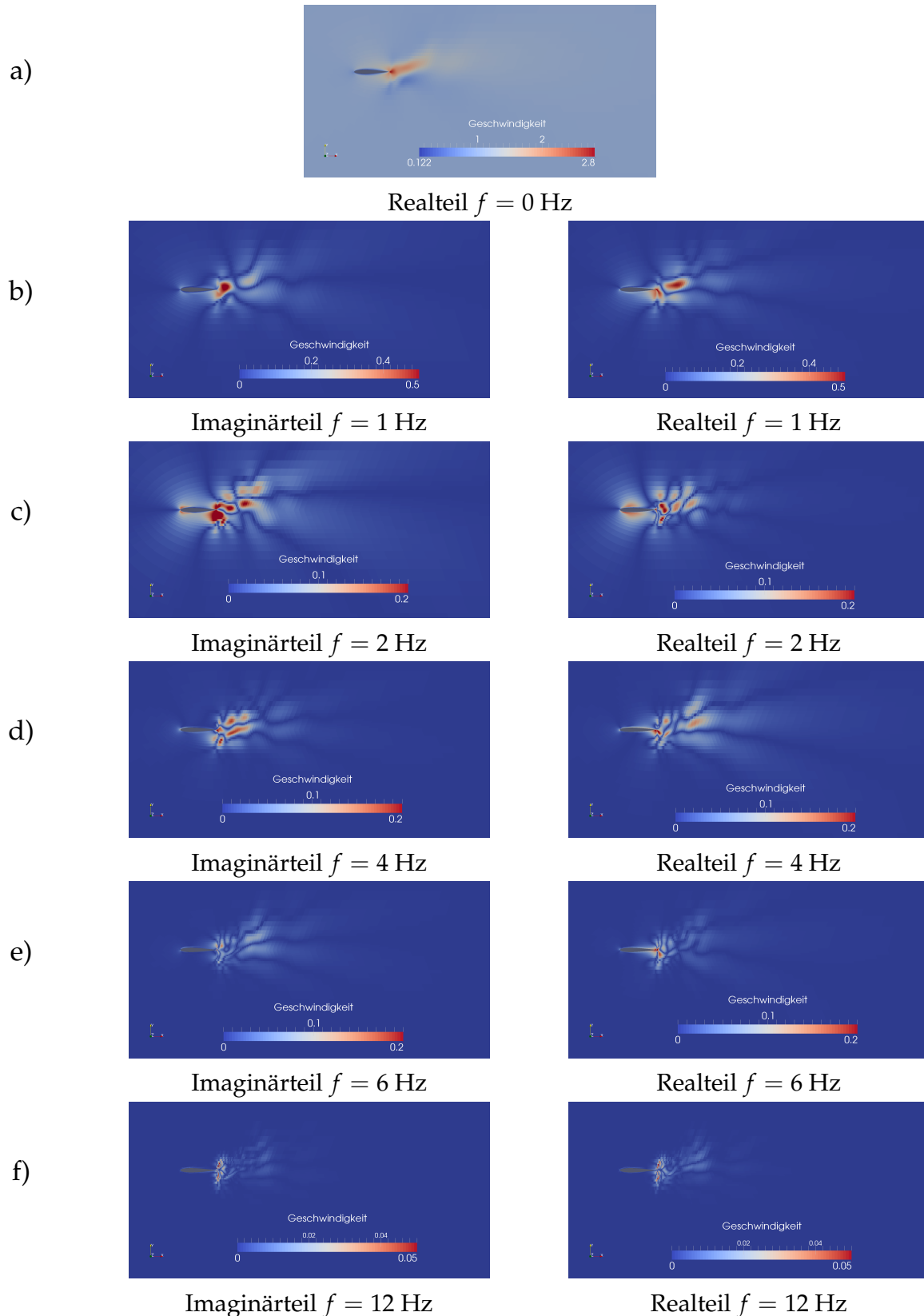


Abbildung 6.6: Imaginär- und Realteil des Betrags der Geschwindigkeit der einzelnen Moden auf dem mittleren Netz für das NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

### 6.1.3 Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren

Die instationäre Strömung um das oszillierende Profil wird nun mit dem GMRES-DILU-PETSc-Löser mit einer Anzahl von drei bis zwölf Harmonischen nachgerechnet. Zusätzlich dazu wird eine Stichprobe mit 20 Harmonischen berechnet. Auf dem mittleren und feinen Netz werden die Unterrelaxationsfaktoren in der Impulsgleichung zu  $\alpha_u = 0,5$  gesetzt. In Abbildung 6.7 sind die Strömungsfelder des Zeitschrittverfahrens und der zeitspektralen Rechnungen zur Zeit  $t = 0$  s mit  $N = [4; 7; 11]$  zu sehen.

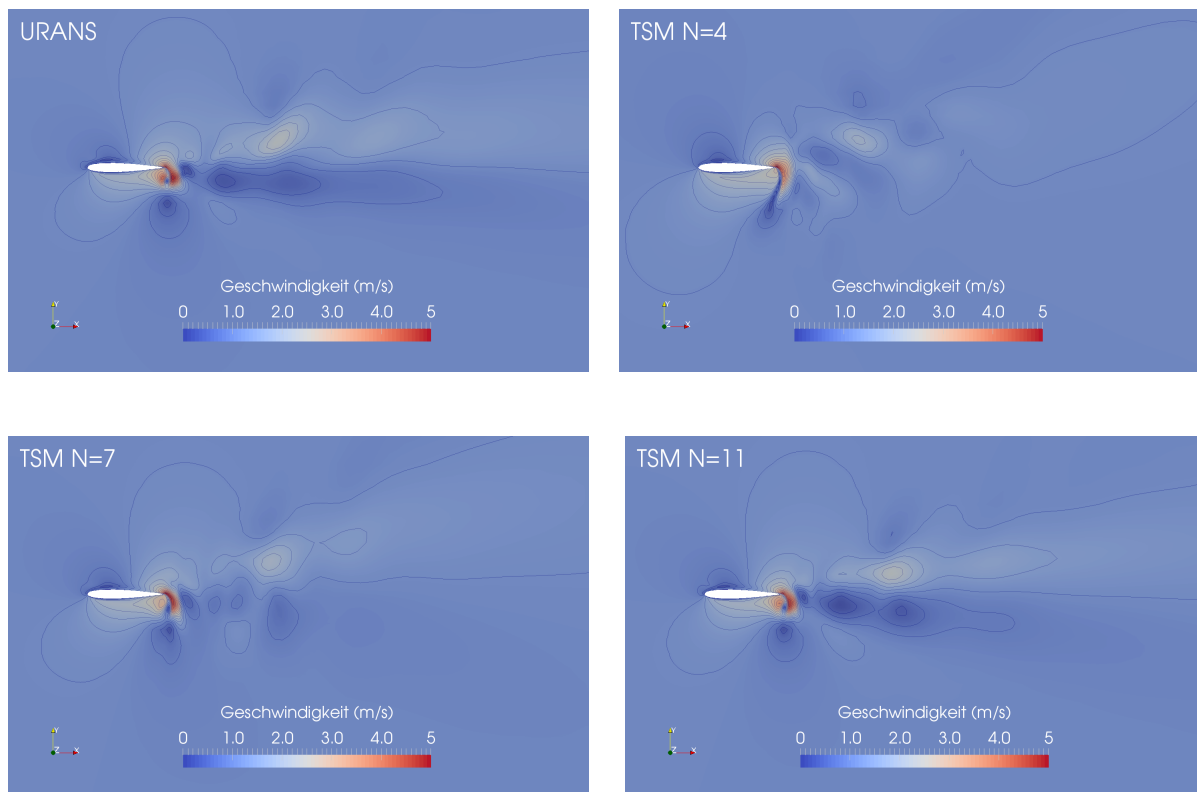


Abbildung 6.7: Betrag der Geschwindigkeit des Zeitschrittverfahrens und der zeitspektralen Rechnungen zur Zeit  $t = 0$  s für das NACA0012-Profil angeregt mit drei Frequenzen

Die Analyse der Strömungsmoden in Abbildung 6.6 zeigte deutlich, dass auch bei der 12. Harmonischen noch hohe Amplituden im Strömungsfeld hinter dem Profil zu finden sind. Dies wird auch in Abbildung 6.7 deutlich. Hier sind die Geschwindigkeitsfelder dreier zeitspektraler Rechnungen und einer Rechnung mit Zeitschrittverfahren gegenübergestellt. Bei den Ergebnissen der Zeitschrittverfahren zeigt sich direkt an der Abströmkante des Profils eine Rezirkulationszone. Diese Zone an der Hinterkanten ist mit geringer Anzahl Harmonischer nur teilweise aufgelöst. Die Anregung mit drei Frequenzen führt außerdem zu einem breiten Spektrum an Moden

im Abströmbereich. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen nähert sich die Geschwindigkeitsverteilung den Ergebnisse aus dem Zeitschrittverfahren.

Nun werden die Auftriebs-  $c_l$  und Widerstandsbeiwerte  $c_d$  am Profil betrachtet. Die Ergebnisse der Rechnungen mit Zeitschrittverfahren und den zeitspektralen Verfahren zeigt Abbildung 6.8. Für eine übersichtlichere Darstellung sind hier nur die Ergebnisse mit  $N = [4; 7; 11; 20]$  Harmonischen zu sehen.

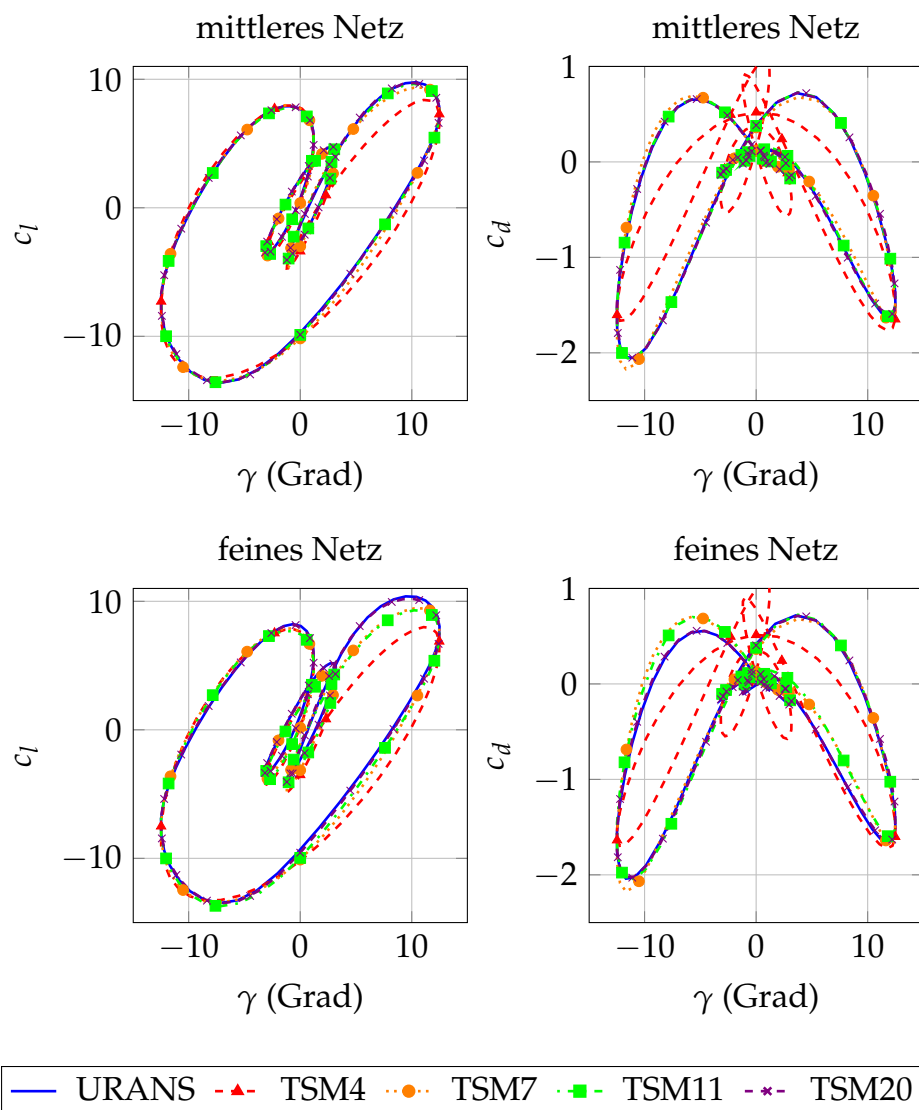


Abbildung 6.8: Gegenüberstellung des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für das mittlere und feine Netz bei räumlicher Diskretisierung zweiter Ordnung für eine Anzahl von  $N = [4; 7; 11; 20]$  Harmonischen berechnet mit einem zeitspektralen Löser und einem Zeitschrittverfahren; Abb. veröffentlicht in [13]

Die Kennwerte sind für das mittlere und feine Netz über den Anstellwinkel aufgetragen. Die Ergebnisse aus TSM und dem Zeitschrittverfahren haben ähnliche Verläufe des Auftriebsbeiwertes. Beim Widerstandsbeiwert zeigen sich signifikante Abweichungen zwischen dem zeitspektralen Löser mit vier Harmonischen und den Zeitschrittverfahren. Bei sieben und elf Harmonischen liegen die Verläufe beider Kennwerte dicht beieinander. Die beste Abbildung der Ergebnisse der Zeitschrittverfahren wird mit der TSM mit elf Harmonischen erreicht. Auf dem feinen Netz zeigen sich jedoch auch bei elf Harmonischen noch Unterschiede, z.B. im Auftriebsbeiwert bei  $\gamma = 10^\circ$ . Der Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes auf dem feinen Netz kann erst mit der Stichprobe mit 20 Harmonischen abgebildet werden.

Die Unterschiede werden über eine Betrachtung der relativen Abweichung  $\epsilon_{rel}$  zwischen Zeitschrittverfahren und der TSM weiter quantifiziert. Die Abweichung ist in Abbildung 6.9 über die Anzahl an Harmonischen aufgetragen. Nur die zeitspektralen Rechnungen mit  $N = [4; 7; 11]$  Harmonischen erreichen ein äußeres Residuum kleiner  $1e-6$ . Alle anderen Rechnungen erreichen das zuvor definierte Konvergenzkriterium nicht. Zur Gegenüberstellung der relativen Abweichung können dennoch alle zeitspektralen Rechnungen genutzt werden, da die Beiwerte konvergieren. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen reduziert sich die relative Abweichung. Erst bei der Stichprobe von 20 Harmonischen werden Abweichungen unterhalb von 1 % erreicht. Für Berechnungsfälle mit mehreren Anregungsfrequenzen sind wesentlich mehr Harmonische zur korrekten Repräsentation der Beiwerte und des Strömungsfeldes notwendig als bei nur einer Anregungsfrequenz.

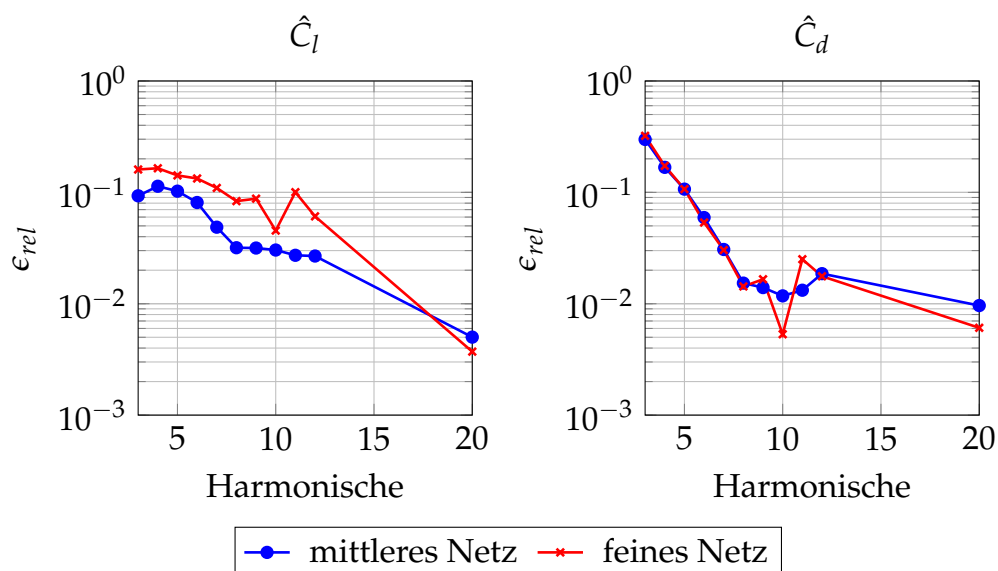


Abbildung 6.9: Relative Abweichung zwischen dem Zeitschrittverfahren und der TSM in den Impulsintegralen  $\hat{C}_l$  und  $\hat{C}_d$  über die Anzahl an Harmonischen

Abschließend werden noch die Rechenzeiten gegenübergestellt. Nur die zeitspektralen Simulationen, die das Konvergenzkriterium erreichten, werden dafür herangezogen. In Abbildung 6.10 ist das Verhältnis der Rechenzeit des Zeitschrittverfahrens zu der Rechenzeit der TSM in Abhängigkeit der Harmonischen zu sehen. Bei sieben Harmonischen benötigt die zeitspektrale Rechnung die Hälfte an Rechenzeit gegenüber dem Zeitschrittverfahren. Ein Break-Even in der Berechnungszeit erreichen TSM und das Zeitschrittverfahren voraussichtlich bei zwölf Harmonischen.

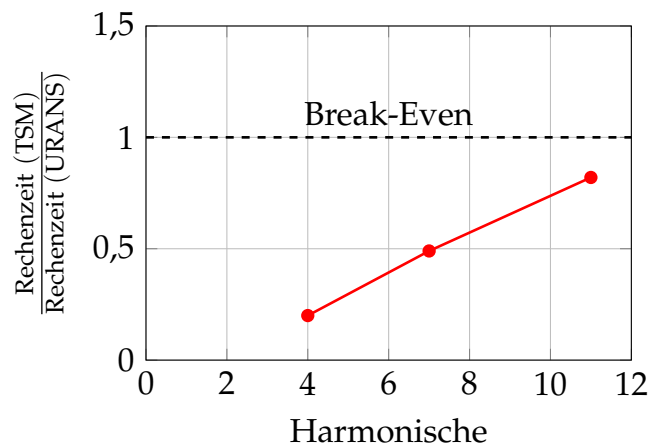


Abbildung 6.10: Verhältnis der Rechenzeit von TSM zu URANS mit  $\Delta t = 2,5e-4$  s auf dem mittleren Netz in Abhängigkeit der Harmonischen für das NACA0012-Profil mit drei Frequenzen

In diesem Abschnitt wurde ein Strömungsproblem mit höheren Moden berechnet. Bei der Berechnung der integralen Kennwerte können die zeitaufgelösten Verläufe auch mit geringen Harmonischen gut abgebildet werden. Bis zur zwölften Harmonischen ist ein Rechenzeitgewinn der TSM gegenüber dem Zeitschrittverfahren nachweisbar. Um jedoch komplexe Strömungsstrukturen im Strömungsfeld abzubilden, sind mehr Harmonische notwendig. Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass ein Effizienzgewinn eventuell nicht mehr gegeben ist. Die Anzahl an Harmonischen muss in Abhängigkeit des Problemfalls, der Fragestellung und über die Anforderungen an die Berechnungsqualität definiert werden. Wenn bei unbekannten Strömungen nicht abgeschätzt werden kann, wie viele Harmonische benötigt werden, müssen im Vorfeld Berechnungen mit Zeitschrittverfahren durchgeführt werden. Bei wiederholten Rechnungen kann dann aber auf die TSM zurückgegriffen werden.

## 6.2 Propeller in Scherströmung

Die in diesem Kapitel gezeigten Ergebnisse wurden teilweise bereits von Baumbach und Stück [13] veröffentlicht.

### 6.2.1 Modellaufbau

Nun wird ein Propeller in Scherströmung berechnet. Der Propeller besteht aus vier Flügeln, die gleichmäßig um die Welle angeordnet sind. Die Welle des Propellers liegt auf der  $x_2$ -Achse des Koordinatensystems. Der Propeller wird axial mit einem Geschwindigkeitsprofil angeströmt. Dieses ändert sich in Abhängigkeit der  $x_1$ -Koordinate. Durch die Scherströmung resultiert ein oszillierender Zeitverlauf des Schubs auf dem Propeller. Die axiale Geschwindigkeit  $u_2(x_1)$  ergibt sich nach

$$u_2(x_1) = u_\infty + \frac{du_2}{dx_1} \cdot x_1 \text{ m/s.} \quad (6.2)$$

Der Propeller kann über den Fortschrittsgrad  $J$  beschrieben werden. Dieser ergibt sich aus der Anströmgeschwindigkeit  $u_\infty$ , dem Durchmesser  $D$  und der Drehzahl  $n$  zu

$$J = \frac{u_\infty}{nD}. \quad (6.3)$$

Die Propellergeometrie und die Geschwindigkeitsverteilung sind in Abbildung 6.11 schematisch zu sehen.

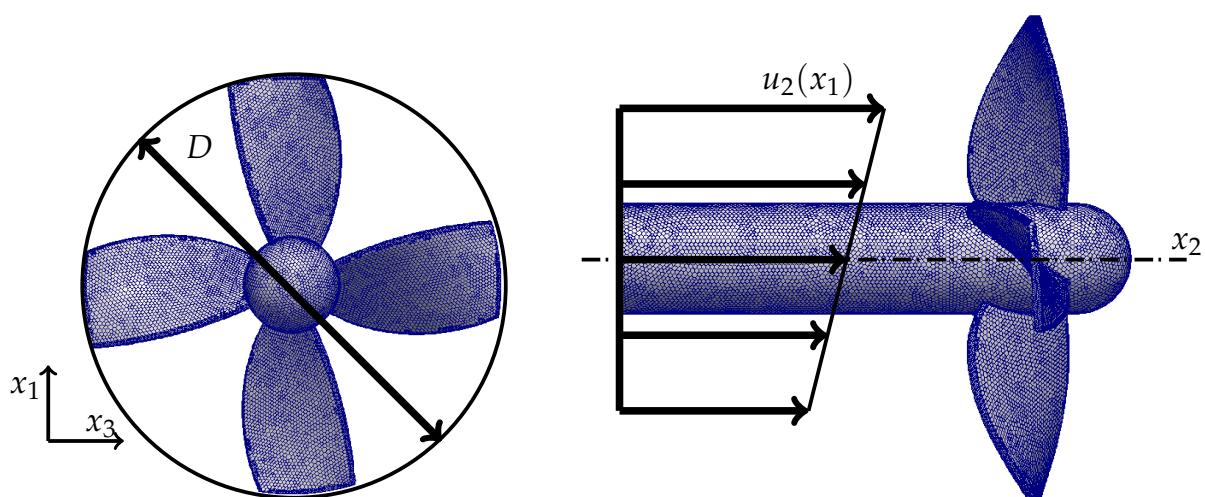


Abbildung 6.11: Abbildung des Propellers in Seit- und Frontansicht mit anströmender Geschwindigkeit; Abb. veröffentlicht in [13]

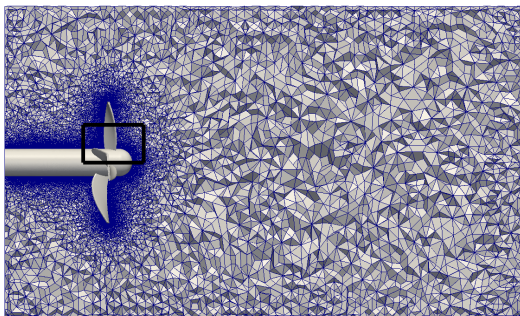


Das Fluid tritt in  $x_2$ -Richtung in das Strömungsgebiet ein. Der Propeller dreht sich um die  $x_2$ -Achse mit einer konstanten Drehzahl. Die  $Re$ -Zahl wird über den Durchmesser des Propellers berechnet. Alle Kenngrößen für den vorliegenden Berechnungsfall sind in Tabelle 6.3 zusammengestellt. Aus der  $Re$ -Zahl folgt, dass die Strömung vollturbulent ist. Es wird daher das SA-Turbulenzmodell verwendet.

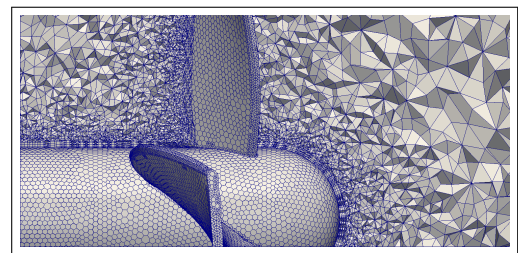
Parameter	$Re$	$J$	$\frac{du_2}{dx_1}$
Wert	1,048e6	0,768	1,67

Tabelle 6.3: Berechnungsparameter für den Propeller in Scherströmung

Die Bewegung des Propellers wird als Starrkörperrotation des gesamten Berechnungsgebietes umgesetzt. Das Geschwindigkeitsprofil am Eingang ist dabei zeitlich konstant. Die Netze sind in dem kommerziellen Programm ANSA von BETA CAE Systems Version 18.00 erzeugt. Drei Wandschichten zur Auflösung der Geometrie werden eingefügt. Das restliche Rechenggebiet wird mit Polyedern unstrukturiert vernetzt. Die Berechnung des Strömungsfeldes erfolgt auf einer Netzstufen mit 309.969 Zellen. Das Netz um den Propeller ist in Abbildung 6.12 zu sehen. Hier ist sowohl das gesamte Berechnungsgebiet wie auch eine Detailansicht des Netzes um den Propeller dargestellt.



(a) Übersicht Propellernetz



(b) Detail vom Propellernetz

Abbildung 6.12: Vernetzung am Propeller

Zur Diskretisierung der diffusiven Terme werden Stromaufwärts-Verfahren zweiter Ordnung genutzt. In der Turbulenzgleichung wird der konvektive Term mit einem Stromaufwärts-Verfahren erster Ordnung approximiert. Für die instationären Rechnungen wird die Zeitableitung mit einem Rückwärts-Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung diskretisiert.



Zur Bewertung der zeitlichen Abweichungen werden Berechnungen mit verschiedenen *CFL*-Zahlen durchgeführt. Die Rechnungen werden von einer stationären Berechnung initialisiert. Die stationäre Berechnung erfolgt im Relativsystem. Bei den instationären Berechnungen werden insgesamt 15 Perioden berechnet. Eine Auflistung der *CFL*-Zahlen, des physikalischen Zeitschrittes und der Anzahl an Zeitschritten pro Periode für die instationären Rechnungen mit Zeitschrittverfahren ist in Tabelle 6.4 dargestellt. Bei den zeitspektralen Rechnungen werden für die Harmonischen  $N = [1; 5; 10; 15; 20; 30; 40]$  Rechnungen aufgesetzt. Auch diese Rechnungen werden von der stationären Lösung initialisiert. Für die äußeren Iterationen gilt als Abbruchkriterium ein Residuum in der Geschwindigkeit kleiner  $1e-5$  und im Druck kleiner  $5e-4$ .

Nr.	physikalischer Zeitschritt (s)	Zeitschritte pro Periode	<i>CFL</i> -Zahl
1	$4e-5$	994	5,2
2	$2e-5$	1988	2,5
3	$1e-5$	3977	1,3
4	$8e-6$	4971	1
5	$7e-6$	5681	0,9

Tabelle 6.4: Physikalischer Zeitschritt, Zeitschritte pro Periode und *CFL*-Zahl für den Propeller in Scherströmung

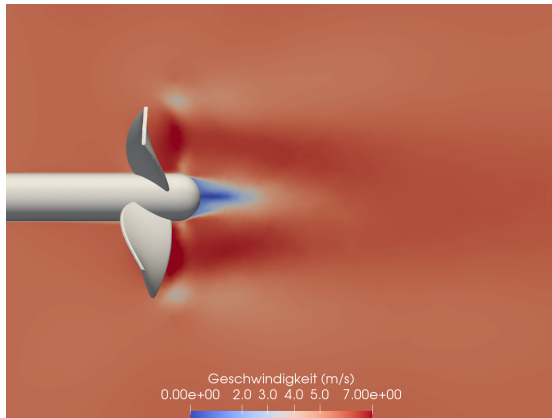
### 6.2.2 Berechnungen mit Zeitschrittverfahren

Das eingeschwungene Geschwindigkeitsfeld um den Propeller zur Zeit  $t = 0$  s für die stationäre, die instationäre Rechnung mit Zeitschrittverfahren und die Unterschiede zwischen stationärer und instationärer Rechnung sind in Abbildung 6.13 zu sehen. Die Strömung wird durch die Rotation des Propellers in Drall versetzt. Durch die Scherströmung am Eintritt kommt es zu einer Ablenkung der Strömung in  $x_1$ -Richtung.

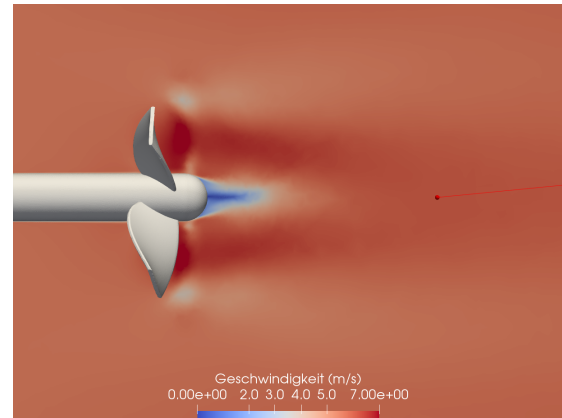
Zur Auswertung der Berechnungen wird die dimensionslose Kenngröße des Schubbeiwertes  $c_s$  herangezogen. Der Schubbeiwert berechnet sich zu

$$c_s = \frac{\Delta p A_0}{\rho n^2 D^4}, \quad (6.4)$$

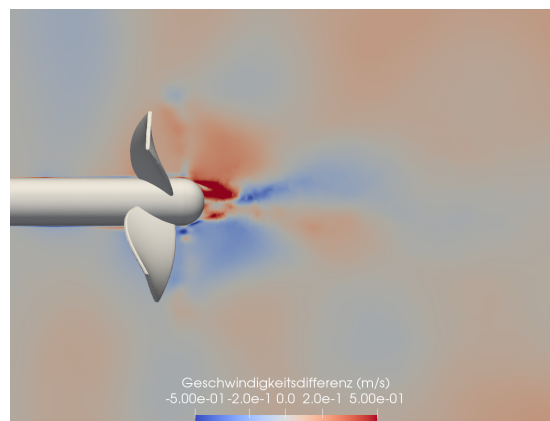
$$A_0 = \frac{\pi}{4} D^2, \quad (6.5)$$



(a) Stationäre Berechnung



(b) Instationäre Berechnung



(c) Unterschied zwischen dem Geschwindigkeitsfeld der stationären und der instationären Strömung

Abbildung 6.13: Geschwindigkeitsfeld um den Propeller zum Zeitpunkt  $t = 0$  s

wo  $\Delta p$  die Druckdifferenz,  $n$  die Drehzahl,  $D$  der Durchmesser des Propellers und  $A_0$  die Grundfläche sind. Das Produkt aus Druckdifferenz und Grundfläche wird auch als Schub bezeichnet.

Die Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt hat auch einen Einfluss auf den Schubbeiwert. Dieser ist nicht konstant über der Zeit, sondern schwingt mit der Blattfolgefrequenz. In Abbildung 6.14 ist im oberen Teil der Verlauf des Schubbeiwertes aller Zeitschritte über die gesamte Berechnungszeit aufgetragen. Zusätzlich dazu ist im unteren Teil auch der Verlauf der Kenngröße in der letzten Periode gezeigt.

Alle Schubbeiwerte berechnet mit unterschiedlichen Zeitschritten sind ähnlich. Bei Betrachtung der zeitlichen Verläufe tritt bis zu einem Zeitpunkt von  $t = 0,05$  s ein Über- und Unterschwingen auf. Danach ist der Mittelwert der Schwingungen konstant. Innerhalb einer Periode treten vier Minima und Maxima im Schubbeiwertverlauf auf. Diese sind auf die vier Blätter des Propellers zurückzuführen. Mit abnehmenden Zeitschritt laufen die Verläufe des Schubbeiwertes zusammen. Die Abwei-

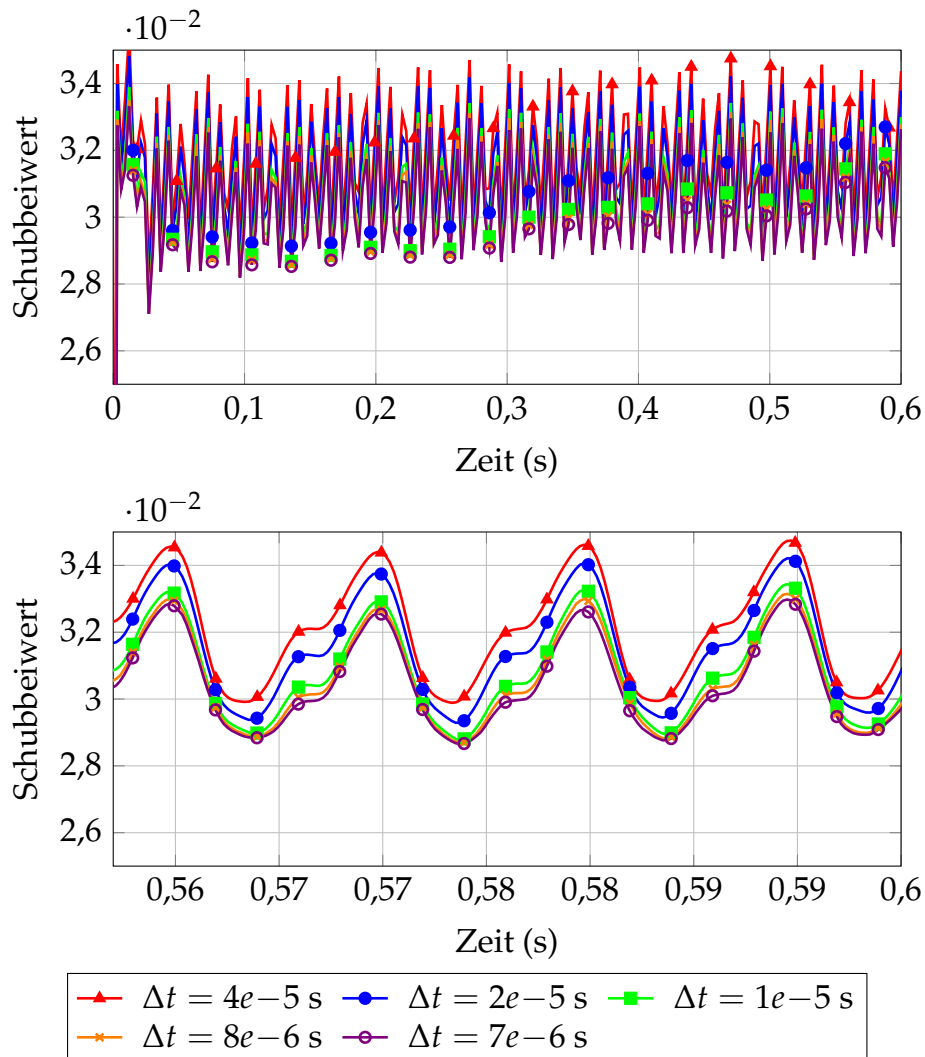


Abbildung 6.14: Schubbeiwert über der Zeit für die Propellerströmung

chungen in den Zeitschritten  $\Delta t = 8e-6$  s und  $\Delta t = 7e-6$  s über eine Periode liegen unterhalb von 1 %. Die Berechnung mit  $\Delta t = 8e-6$  s wird daher als Referenzrechnung angesehen.

Im Gegensatz zu den zuvor berechneten Beispielen ist der Einschwingvorgang hier deutlich ausgeprägter. Um die Periodizität besser zu beurteilen, wird eine integrale Größe hergeleitet. Der Schubbeiwert  $c_s$  wird dazu über alle Zeiten und Frequenzen integriert. Das Impulsintegral wird als  $\hat{C}_s$  bezeichnet und wird über

$$\hat{C}_s = \int_{f=0}^{f=1000 \text{ Hz}} \int_{t=0}^T |c_s(t)| e^{-i2\pi ft} dt df \quad (6.6)$$

berechnet.

Das Impulsintegral  $\hat{C}_s$  über alle Perioden ist in Abbildung 6.15 zu sehen. In den ersten drei Perioden tritt zunächst ein Unter- und Überschwingen der Lösung auf, bevor sich  $\hat{C}_s$  einem konstanten Wert annähert. Nach drei Perioden sind die Abweichungen unterhalb von 1 %. Die Lösung wird daher als eingeschwungen angesehen.

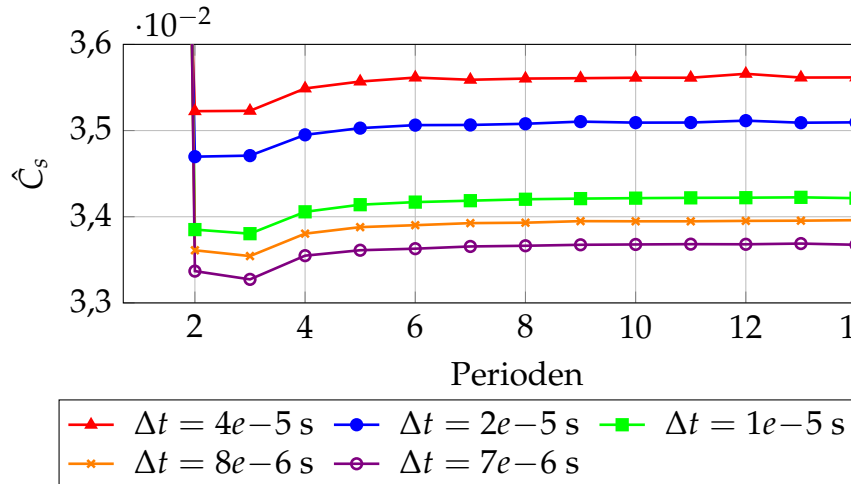


Abbildung 6.15: Impulsintegral  $\hat{C}_s$  für die Propellerströmung

In Abbildung 6.16 sind die Amplituden des Schubbeiwertes über die Frequenz für alle Rechnungen mit dem Zeitschrittverfahren aufgetragen. Die Unterschiede in den Amplituden der einzelnen Rechnungen mit unterschiedlichen Zeitschritten sind gering. Die Amplitude der nullten Mode fällt am höchsten aus. Die zeitlich-gemittelte Strömung überwiegt bei dem vorliegenden Berechnungsfall. Bei der Grundfrequenz  $f = 25,146$  Hz sind keine Peaks im Spektrum zu sehen. Allerdings treten bei den Harmonischen der Blattfolgefrequenz, welche sich aus der Grundfrequenz multipliziert mit der Flügelanzahl ergibt, hohe Amplituden auf. Ab  $f = 500$  Hz sind die Amplituden des Schubbeiwertes deutlich abgeklungen. Es ist zu prüfen, ob 20 Harmonische ausreichend sind, die Strömung gut wiederzugeben.

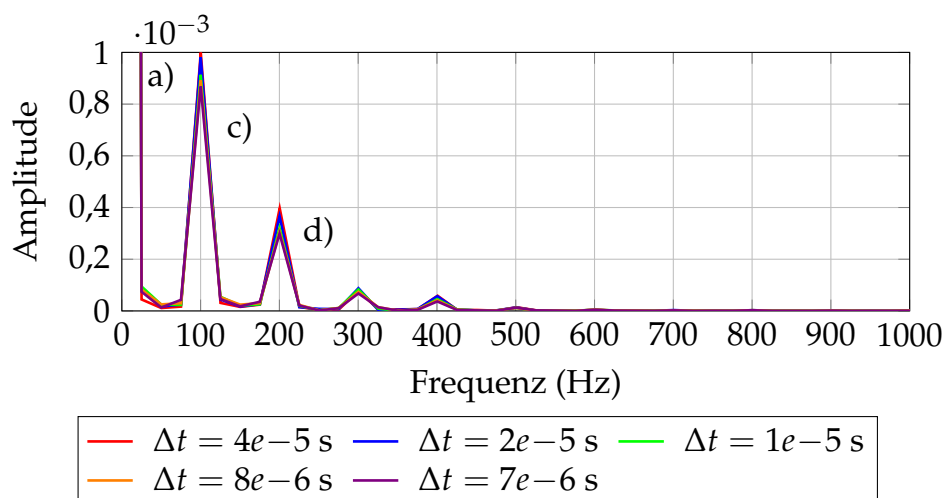


Abbildung 6.16: Fourier-Koeffizienten des Schubbeiwertes der Propellerströmung

Zusätzlich zu den Fourier-Koeffizienten der Schubbeiwerte werden auch die Moden im gesamten Strömungsfeld untersucht. In Abbildung 6.17 a)-d) sind der Real- und Imaginärteil des Geschwindigkeitsbetrags für die Frequenzen  $f = [0; 25; 100; 200]$  Hz zu sehen. Die Buchstabenbezeichnung erfolgt analog zu der Kennzeichnung von Abbildung 6.16.

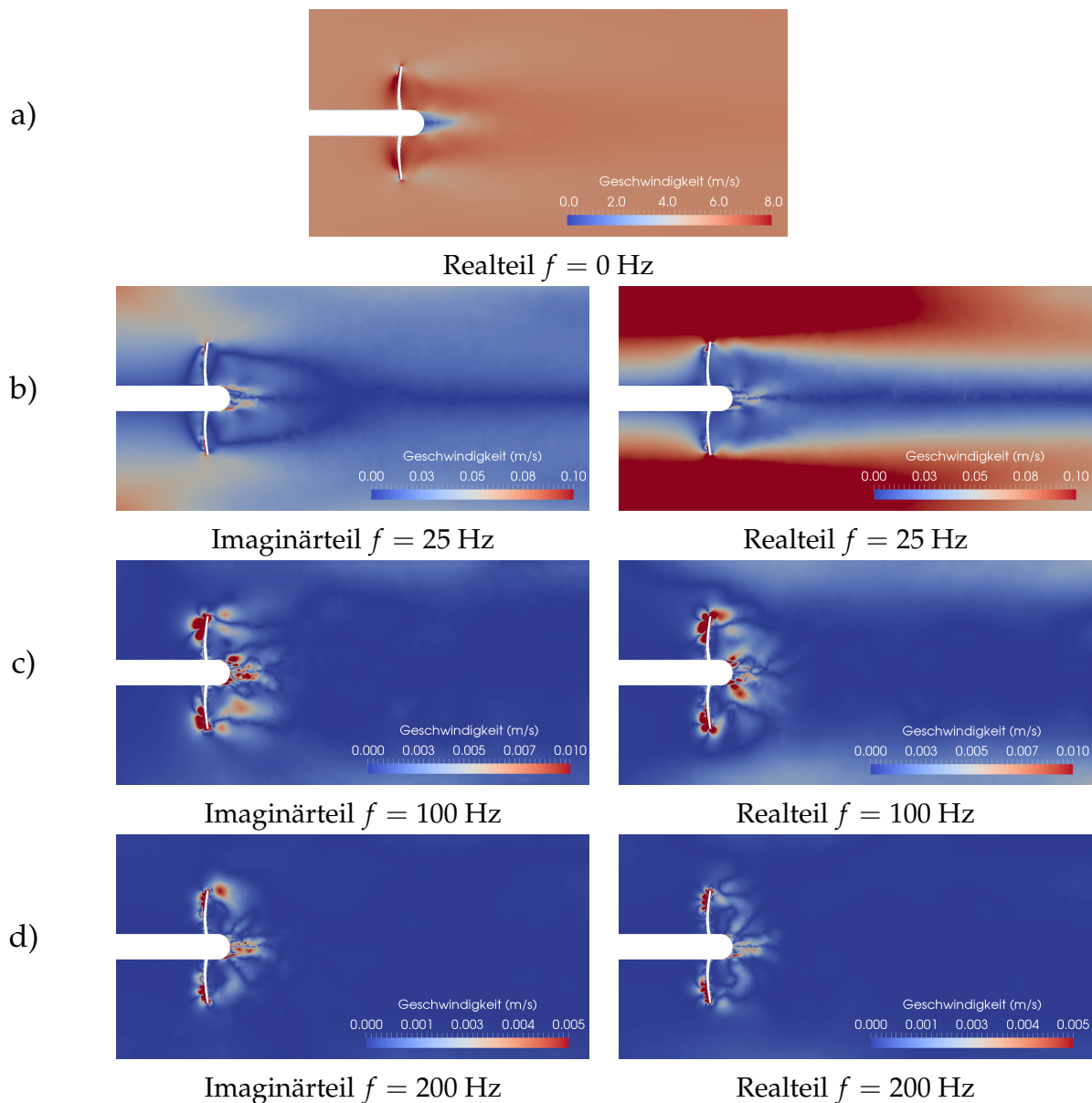


Abbildung 6.17: Imaginär- und Realteil des Betrags der Geschwindigkeit der einzelnen Moden für den Propeller in Scherströmung

Die höchsten Geschwindigkeiten treten bei der nullten Mode auf. Auch die Modalanalyse des gesamten Strömungsfeldes zeigt, dass die Amplituden der höheren Moden  $f = [100; 200; \dots]$  Hz im Vergleich zu der Amplitude der nullten Mode gering sind. Die Amplitude der zeitlich-gemittelten Hauptströmung, welche durch die nullte Mode gegeben ist, überwiegt daher gegenüber den Amplituden der höheren Moden, d.h. die Unterschiede zwischen der zeitlich-gemittelten Strömung und der instationären Strömungen sind klein (vgl. auch Abbildung 6.13). Durch die Scherströmung zeigt sich keine Symmetrie der Moden im Abströmfeld. Hohe Amplituden sind an den Blättern und der Propellerspitze zu sehen. In beiden Bereichen kommt es zu Ablösungen. Diese wechselwirken stromabwärts und die Moden im Abströmfeld entstehen.

Abschließend sind in Abbildung 6.18 die Rechenzeiten für eine Periode der Propellerströmung gegeben. Die Rechenzeit steigt mit abnehmendem Zeitschritt, da mehr äußere Iterationen notwendig sind.

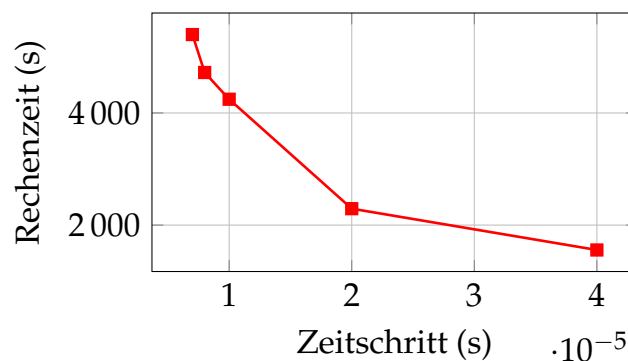


Abbildung 6.18: Rechenzeit pro Kern für das Zeitschrittverfahren für den Propeller in Scherströmung

### 6.2.3 Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren

Nun werden die Ergebnisse der zeitspektralen Rechnungen ausgewertet. Der zeitliche Verlauf des Schubbeiwertes ist für alle Anzahlen an Harmonischen in der Abbildung 6.19 zu sehen. Zusätzlich zu den zeitspektralen Ergebnissen sind das Ergebnis aus der stationären Rechnung und der instationäre Verlauf des Zeitschrittverfahrens mit  $\Delta t = 8e-6$  s eingezeichnet.

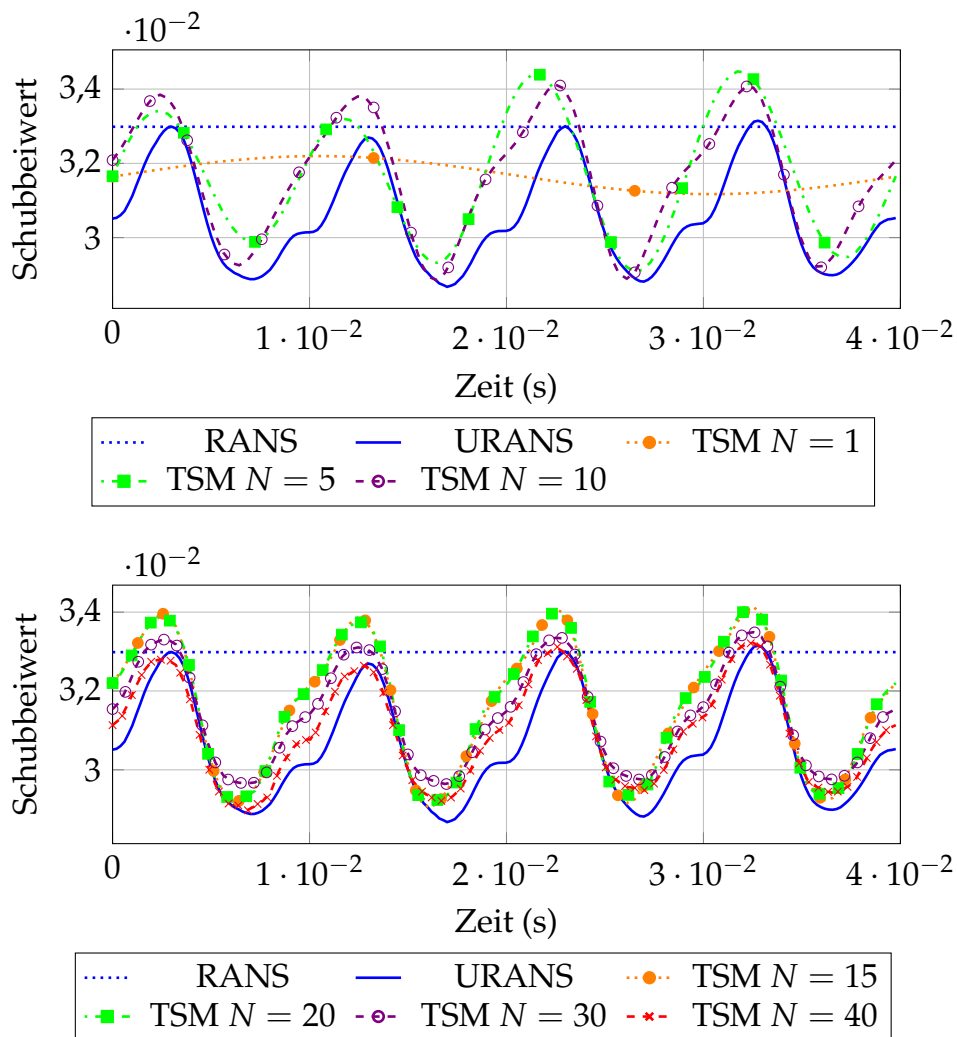


Abbildung 6.19: Schubbeiwert des Propellers berechnet mit TSM für die Anzahl an Harmonischen  $N = [1; 5; 10; 15; 20; 30; 40]$  und die Ergebnisse des Zeitschrittverfahrens und der stationären Rechnung; Abb. veröffentlicht in [13]

Bei der stationären Berechnung wird der Schubbeiwert überschätzt, da die instationären Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Schaufelkanälen und der Scherströmung nicht abgebildet werden können. Auch bei der TSM mit einer Harmonischen fällt der gemittelte Schubbeiwert über der Periode höher aus. Der Zeitverlauf wird außerdem nicht getroffen. Erst mit fünf Harmonischen wird der Zeitverlauf im Trend abgebildet. Nun sind auch die vier Peaks im Schubbeiwert resultierend aus der Scherströmung und der Strömung in den vier Schaufelkanälen zu sehen. Die Amplituden des Schubbeiwertes entsprechen jedoch immer noch nicht dem Referenzergebnis des Zeitschrittverfahrens. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen nähert sich der zeitliche Verlauf den Ergebnissen aus dem Zeitschrittver-

fahren. Ein deutlicher Unterschied im Schubbeiwertverlauf ist zwischen den TSM-Ergebnissen mit  $N = 30$  und  $N = 40$  Harmonischen zu sehen. Mit  $N = 40$  Harmonischen reduziert sich die Amplitude. Der Verlauf des Schubbeiwertes ähnelt auch mehr dem Ergebnis aus dem Zeitschrittverfahren. Dennoch treten auch hier über den Zeitverlauf maximale Abweichungen im Schubbeiwert von 4 % auf. Der Zeitaufwand mit 40 Harmonischen ist bereits deutlich über dem Aufwand mit dem Zeitschrittverfahren, daher wird keine Stichprobe mit mehr Harmonischen durchgeführt.

Die absoluten Residuen der äußeren Druckkorrektur-Iterationen aller zeitspektraler Rechnungen sind in Abbildung 6.20 zu sehen.

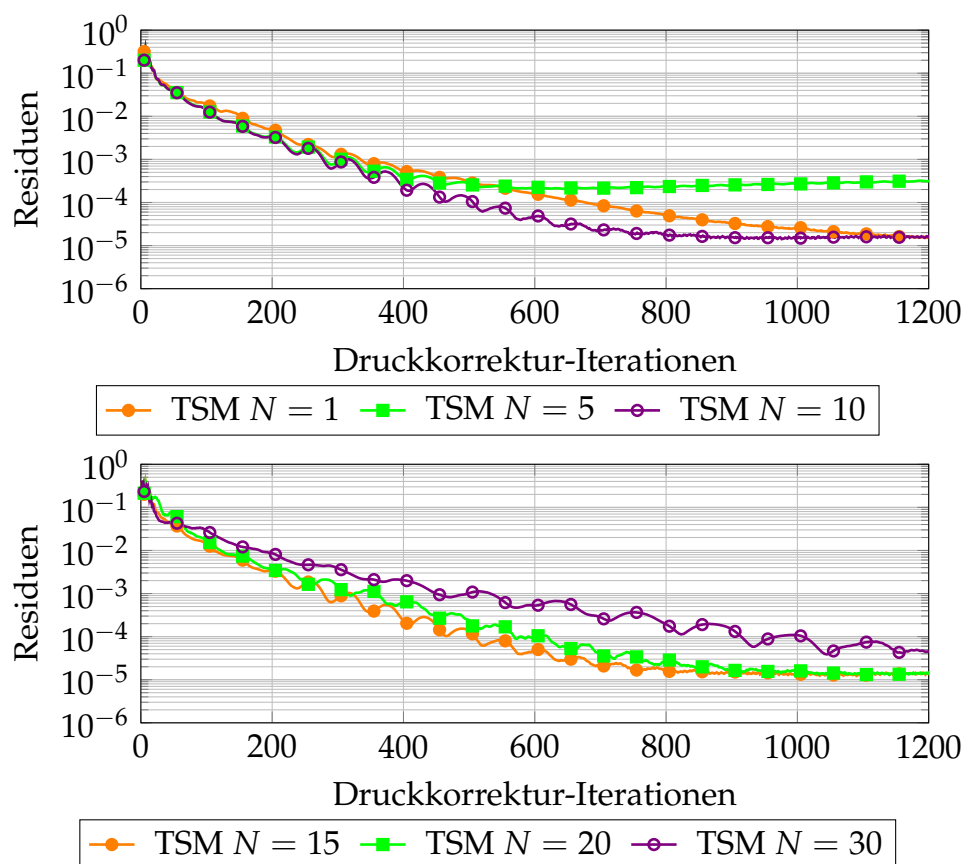


Abbildung 6.20: Residuen (L1-Norm) der äußeren Druckkorrektur-Iterationen für die zeitspektralen Rechnungen für den Propeller

Die zeitspektralen Rechnungen sind mit einem Unterrelaxationsfaktor von  $\alpha_u = 0,5$  durchgeführt. Für 30 und 40 Harmonische musste der Unterrelaxationsfaktor auf  $\alpha_u = 0,3$  reduziert werden. In keiner Rechnung werden Residuen kleiner  $1e-5$  erreicht. In den Residuenverläufen ist in den ersten 1000 Iterationen ein Schwingen



zu beobachten, danach erreichen die Verläufe ein Plateau und die Residuen fallen nicht weiter. Dies ist bei den Verläufen mit einer und fünf Harmonischen nicht der Fall. Die Anzahl an Harmonischen ist aber zu gering, um den zeitlichen Verlauf zu repräsentieren. Dies ist auch im Residuenverlauf beobachtbar. Nachdem die Residuen ein Plateau erreicht haben, führt auch eine erhöhte Anzahl an Iterationen zu keiner weiteren Reduzierung in den Residuen. Die Gegenüberstellung der Rechenzeiten findet daher bei 1000 Iterationen statt. Die Residuen mit 30 Harmonischen fallen langsamer, da der Unterrelaxationsfaktor reduziert ist. Dieser ist daher auch nicht in der Gegenüberstellung der Rechenzeiten enthalten.

Abbildung 6.21 zeigt das Verhältnis der Rechenzeit von TSM zu Zeitschrittverfahren in Abhängigkeit der Harmonischen. Die Rechenzeit der zeitspektralen Verfahren wird für 1000 Iterationen evaluiert. Bei den Zeitschrittverfahren beinhaltet die Rechenzeit drei Perioden, da erst danach ein periodischer Zustand erreicht wird. Die Rechnungen für Zeitschrittverfahren und TSM fanden auf 16 Kernen statt. Der Break-Even von dem Zeitschrittverfahren und TSM ist bei fünf Harmonischen erreicht. Bei einer höheren Anzahl an Harmonischen ist die TSM langsamer als das Zeitschrittverfahren. Mit fünf Harmonischen werden die Amplituden im zeitlichen Verlauf des Schubbeiwertes jedoch nicht getroffen.

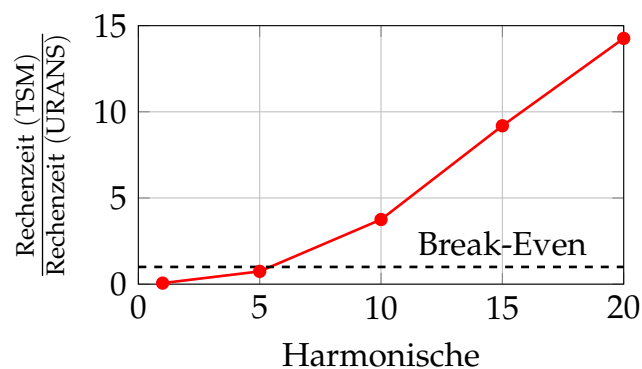


Abbildung 6.21: Verhältnis der Rechenzeit von TSM zu URANS mit  $\Delta t = 8e-6$  s in Abhängigkeit der Harmonischen für den Propeller in Scherströmung

Dieser Abschnitt zeigt, dass der zeitspektrale Löser auch zur Berechnung von Strömungsmaschinen geeignet ist. Die Ergebnisse mit TSM mit wenigen Harmonischen können den zeitlichen Mittelwert des Schubbeiwertes besser wiedergeben als stationäre Verfahren. Allerdings kann der instationäre Verlauf des Schubbeiwertes erst über eine höhere Anzahl an Harmonischen abgebildet werden. In diesem Fall ist kein Rechenzeitgewinn gegenüber Zeitschrittverfahren nachweisbar. Es bleibt daher in Abhängigkeit des Berechnungsfalls und der Problemstellung zu prüfen, ob ein Effizienzgewinn umsetzbar ist.

## 6.3 Ventilschwingung

### 6.3.1 Modellaufbau

Abschließend wird der zeitspektrale Löser auf seine Sensitivität hinsichtlich der Netzeigenschaften untersucht. Dazu werden Berechnungen auf strukturierten Netzen unterschiedlicher Seitenverhältnisse, auch Aspect Ratio ( $AR$ ) genannt, durchgeführt. Das Seitenverhältnis wird berechnet über

$$AR = \frac{1}{6} \cdot \frac{|ax| + |ay| + |az|}{V^{2/3}}, \quad (6.7)$$

wo  $ax, ay, az$  die Flächen des Begrenzungsrechtecks eines KV's sind und  $V$  das Volumen eines KV's ist. Bei einem Seitenverhältnis von  $AR = 1$  hat das KV eine Würfel-Form. Mit zunehmendem Seitenverhältnis wird das KV gestreckt. Vor allem im Bereich von Randschichten sind oftmals hohe Seitenverhältnisse zu finden. Bülow, Venkateswaran und Merkle [14] und Diskin und Thomas [21] zeigen, dass das Seitenverhältnis die Konvergenzeigenschaften negativ beeinflussen kann. Es wird die Hypothese untersucht, dass die Steifigkeit des linearen Systems aufgrund hoher  $AR$  vor allem beim zeitspektralen Verfahren zu schlechteren Konvergenzeigenschaften führt. Dies begründet sich darauf, dass beim zeitspektralen Löser die Konditionierung der linearen Systemmatrix wegen dem zeitspektralen Quellterm ohnehin schlechter gegenüber Zeitschrittverfahren ist und durch die hohen Nebendiagonaleinträge der konvektiven Terme in den gestreckten Zellen es zusätzlichen zu einer Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften kommt. Das bedeutet, dass bei der Verwendung eines zeitspektralen Verfahrens engere Netzqualitätskriterien anzusetzen sind als bei Verwendung eines Zeitschrittverfahrens.

Die Untersuchung erfolgt anhand einer Ventilschwingung in Wasser. In strömungsmechanischen Bauteilen werden oftmals Ventile eingesetzt. Diese werden genutzt, um den Durchfluss zu sperren und zu regeln. Neben Kugelventilen treten auch Lamellen- oder Nadelventile auf. Die Ansteuerungsart der Ventile ist ebenfalls abhängig von der spezifischen Aufgabe. Oftmals werden selbstbetätigende Ventile im Strömungsmaschinenbau verwendet, da diese kostengünstig und einfach umsetzbar sind. Flatterventile öffnen selbstständig bei entsprechend anliegendem Druck. Beim Öffnen des Ventils findet durch das Ausströmen des Fluids ein Druckausgleich vor und hinter dem Ventil statt. Die Bewegung des Ventils erfolgt meist periodisch in Eigenfrequenz des Ventils. Die Ventilschwingung stellt eine besondere Herausforderung an strömungsmechanische Berechnungen dar, da die Schwingungen auf kleinen Zeitskalen erfolgen und große Änderungen im Druck und der Geschwindigkeit beim Öffnen bzw. Schließen des Ventils auftreten.

Die Abmessungen des Berechnungsgebietes und des Ventils für die nachfolgenden Untersuchungen sind in Abbildung 6.22 dargestellt. Das Fluid strömt über einen kleinen Zylinder ein und strömt über eine große Ausgleichskammer wieder aus.

Zur Regelung des Volumenstroms werden beide Kammern durch ein Lamellenventil voneinander getrennt. Eine komplette Schließung des Ventils kann nicht realisiert werden, da ein Löschen der KV nicht möglich ist. Aufgrund des Deformationsansatzes kann ein minimaler Spalt von  $1e-4$  mm zwischen Ventil und Gehäuse realisiert werden, wie in Detail Z in Abbildung 6.22 zu sehen ist.

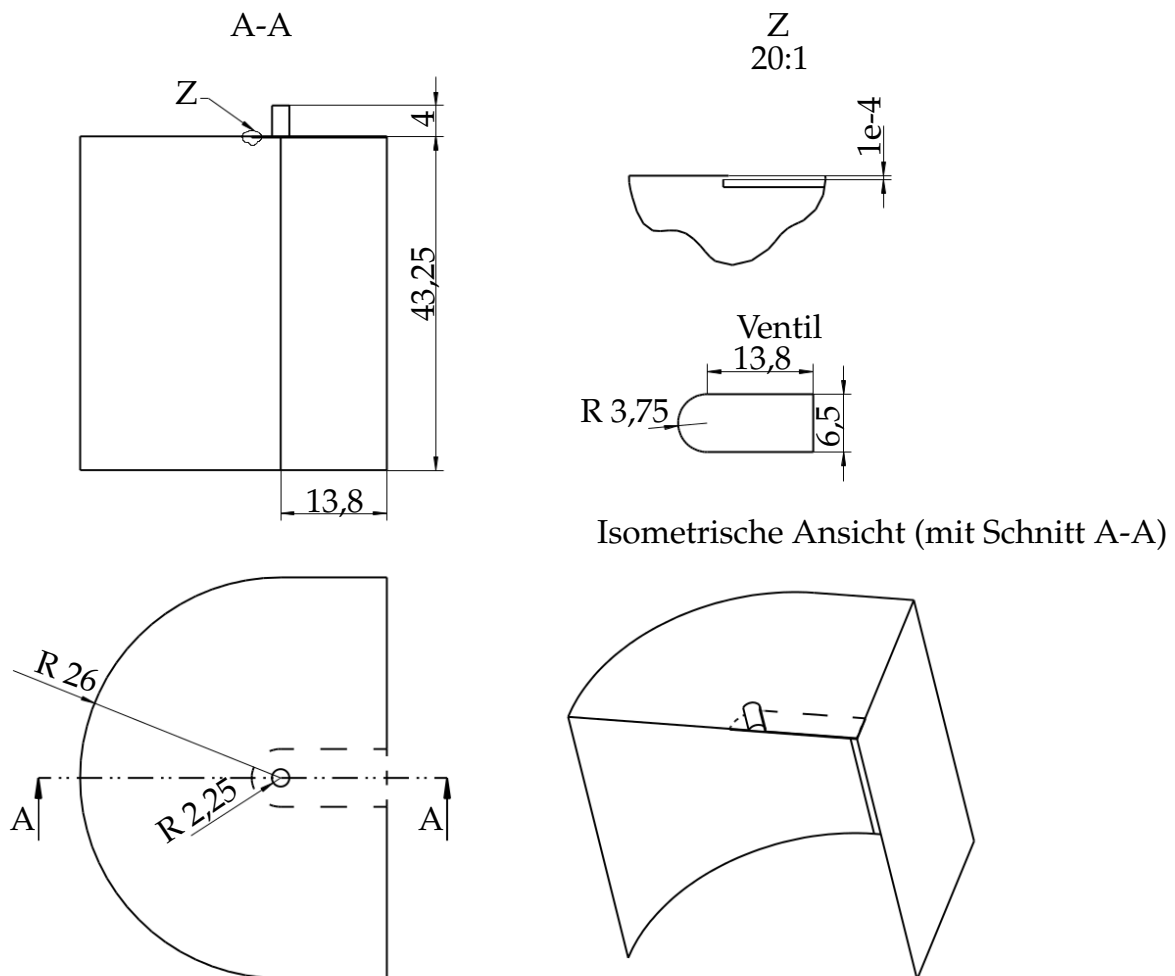


Abbildung 6.22: Berechnungsgebiet für die Ventilschwingung

In der Rechnung ist eine feste Geschwindigkeit am Austrittsrand gesetzt. Am Eintrittsrand wird ein fester, relativer Druck gesetzt und die Geschwindigkeit über eine Null-Gradienten-Randbedingung berechnet. Die Verschiebungsfunktion des Ventils ist mit

$$s(t) = a \cdot \sin(2\pi \cdot ft) \quad (6.8)$$

gegeben. Hier ist die Amplitude mit  $a$  gegeben, die Frequenz  $f$  wird auf die reduzierte Frequenz  $f_r$  zurückgeführt und die  $Re$ -Zahl wird aus dem einströmenden Volumenstrom in den kleinen Zylinder und aus der Querschnittsbohrung oberhalb des Ventils berechnet. Die Parameter für den Berechnungsfall sind Tabelle 6.5 zu entnehmen. Der Fall wird vollturbulent mit dem Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell gerechnet.

Parameter	$a$ (mm)	$Re$	$f_r$
Wert	0,2	207.000	4,62

Tabelle 6.5: Berechnungsparameter für die Ventilschwingung

Um den verschiedenen physikalischen Skalen gerecht zu werden, wird für das Zeitschrittverfahren ein dimensionsloser Zeitschritt  $CFL$  gesetzt. Der physikalische Zeitschritt wird über  $CFL = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}$  berechnet. Dieser ist also bei kleinen Öffnungswinkeln kleiner, da im geschlossenen Zustand des Ventils die Geschwindigkeit hoch und die KV klein sind. Während bei voller Öffnung große Zeitschritte genutzt werden. Die  $CFL$ -Zahl kann Werte von  $CFL = [5; 10; 20]$  annehmen. Die Zeitableitung wird mit einem BDF-Verfahren zweiter Ordnung diskretisiert. Die Rechnungen mit dem zeitspektralen Löser werden für eine Anzahl von  $N = [5; 10; 15; 20]$  Harmonischen durchgeführt. Für die Analysen wird der Unterrelaxationsfaktor der zeitspektralen Rechnungen in der Impulsgleichung zu  $\alpha_u = 0,5$  gesetzt. Zur Diskretisierung der räumlichen Terme wird ein Stromaufwärts-Verfahren zweiter Ordnung mit Beschränkung des Gradienten verwendet [70]. Die äußeren Iterationen des Zeitschrittverfahrens werden abgebrochen, wenn das Residuum im Druck kleiner  $1e-5$  und in der Impulsgleichung kleiner  $1e-6$  ist.

Die Vernetzung des Gebietes erfolgt vollstrukturiert in der Software ANSYS ICEM CFD. Dies erlaubt eine einfache Einstellung der Seitenverhältnisse in den Zellen. Es werden zwei unterschiedliche Netzstufen untersucht. Das grobe Netz enthält 248.250 Zellen und das feine Netz 1.986.000 Zellen. In den beiden Ausgangsnetzen liegen die Seitenverhältnisse unter 1000. Das feine Netz dient ausschließlich zur Bewertung der räumlichen Abweichungen. Auf Basis des groben Netzes wird ein Netz mit höheren Seitenverhältnissen erstellt. Eine Übersicht aller Netze ist in Tabelle 6.6 zu sehen.

Nr.	Bezeichnung	Abkürzung	Anzahl der KV	$CFL$ -Zahl
1	Grobes Netz AR-Verteilung 0	Grob_AR0	248.250	5 10 20
2	Grobes Netz AR-Verteilung 1	Grob_AR1	277.450	5 10 20
3	Feines Netz AR-Verteilung 0	Fein_AR0	1.986.000	5 10 20

Tabelle 6.6: Netzstufen für die Ventilschwingung

In Abbildung 6.23 ist die Verteilung der Seitenverhältnisse in den beiden groben Netzen dargestellt. Die größten Seitenverhältnisse treten im Bereich des Ventils auf. Das restliche Berechnungsgebiet ist vorrangig mit  $AR \leq 200$  vernetzt.

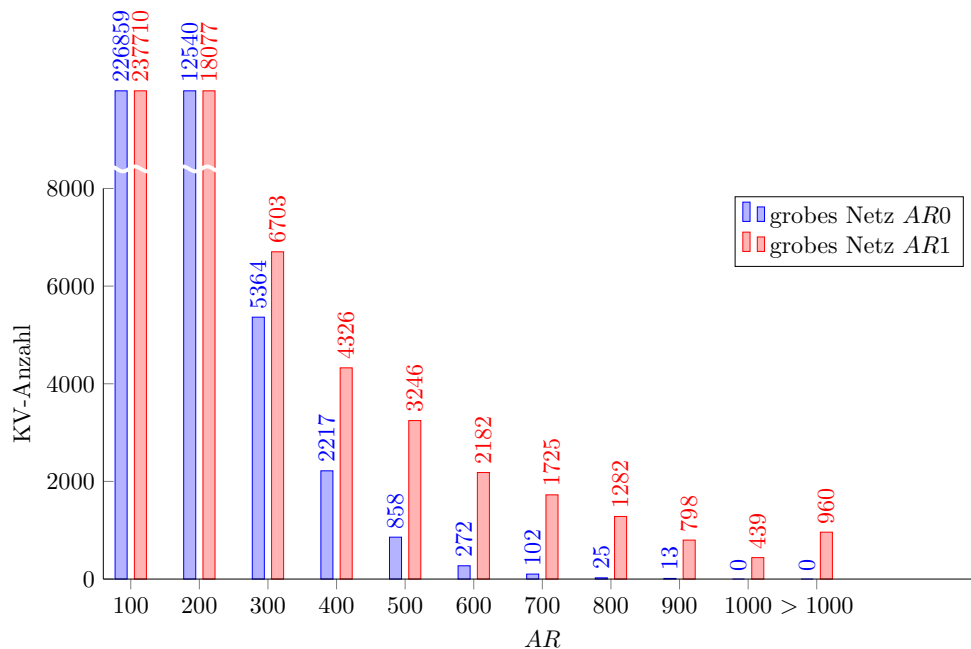


Abbildung 6.23: Verteilung der Seitenverhältnisse im groben Netz

Das Ventil oszilliert starr in axialer Richtung. Bei der Verschiebung der Netzknoten basierend auf der Bewegung der Ränder ist sicherzustellen, dass auch bei starken Verzerrungen die Netzqualität beibehalten wird und auch nach mehreren Perioden das Netz noch rechenfähig ist. Die Netzqualität in dünnen Schichten kann durch die in OpenFOAM® zur Verfügung stehenden Laplace-Verfahren nicht erhalten werden [1]. Daher wird für den vorliegenden Berechnungsfall die Bewegung der Netzknoten mit einer zusätzlichen Routine analytisch berechnet. In dieser erfahren die Zellen in der Ventilebene die volle Auslenkung und die Verschiebung der Zellen an den festen Wänden ist Null. Zwischen dem Ventil und den restlichen Wänden wird eine lineare Verteilung für die Verschiebung der KV-Punkte verwendet. Dieses Vorgehen ist auch bekannt als Transfinite-Interpolation. Diese Verschiebungsfunktion ändert nur die  $x_1$ -Koordinate der Netzknoten. Das bedeutet, dass alle KV im Berechnungsgebiet mitbewegt werden. Der Verschiebungsfaktor für jedes KV wird zu Beginn des Löseraufrufs als festes Feld hinterlegt. In Abbildung 6.24 sind die Verschiebungsfaktoren für das Ventilnetz für das gesamte Rechenggebiet auf der linken Seite und für einen kleinen Ausschnitt auf der rechten Seite zu sehen.

Das Netz bei minimaler und maximaler Auslenkung ist in Abbildung 6.25 zu erkennen. Die Oberfläche des Ventils ist in blau koloriert.

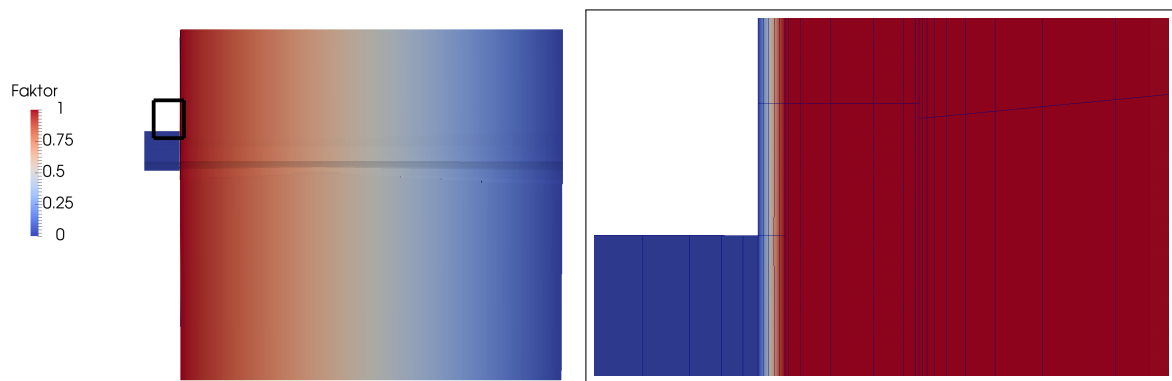
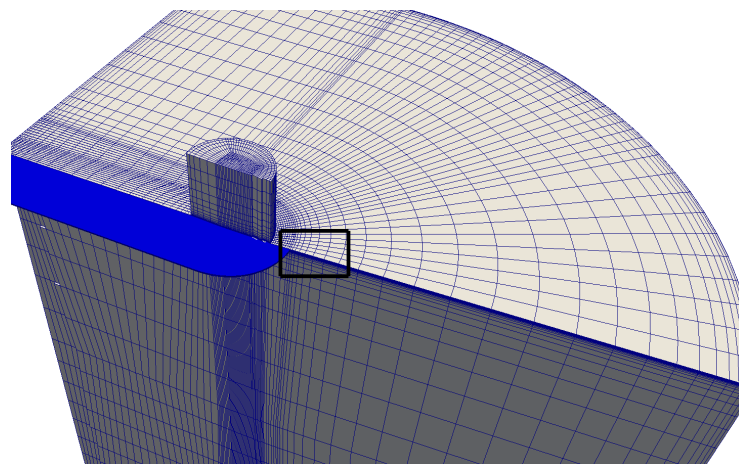
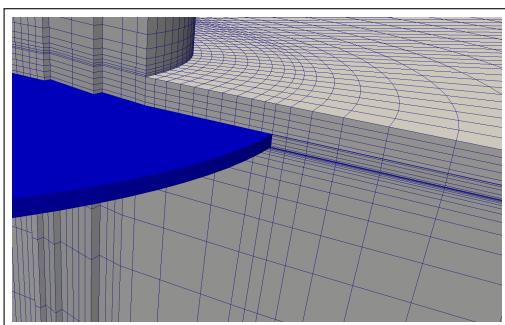


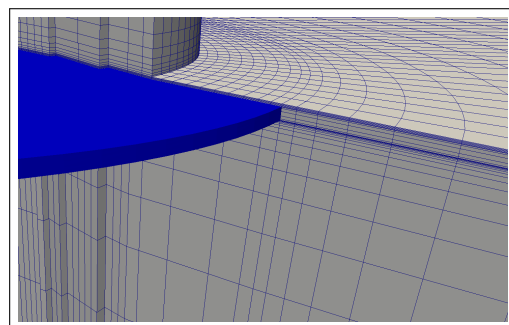
Abbildung 6.24: Verschiebungsfaktor für die einzelne Netzknoten für die Ventilschwingung



(a) Übersicht Ventilnetz



(b) Ventil vollständig geöffnet



(c) Ventil vollständig geschlossen

Abbildung 6.25: Netz um das Ventil

### 6.3.2 Berechnungen mit Zeitschrittverfahren

Zum Zeitpunkt  $t = 9,375e-4$  s ist das Ventil geschlossen. Die maximale Auslenkung ist bei  $t = 0$  s erreicht. Bei Schließung des Ventils liegt ein hoher Druckunterschied zwischen beiden Kammern vor. Mit Öffnung des Ventils wird dieser kontinuierlich abgebaut. In Abbildung 6.26 ist das Ventil halb geöffnet zu sehen. Die Stromlinien sind in der Geschwindigkeitsamplitude und das Ventil im Druck koloriert. Es zeigt sich, dass die größten Belastungen am Ventil direkt unterhalb der zylindrischen Öffnung anliegen. Dort trifft das Fluid auf und wird um 90 Grad umgelenkt. Durch den kleinen Spalt zwischen Einlass und Ventil wird das Fluid auf bis zu 450 m/s beschleunigt, bevor es wieder in Richtung des Ausgangs gelenkt wird.

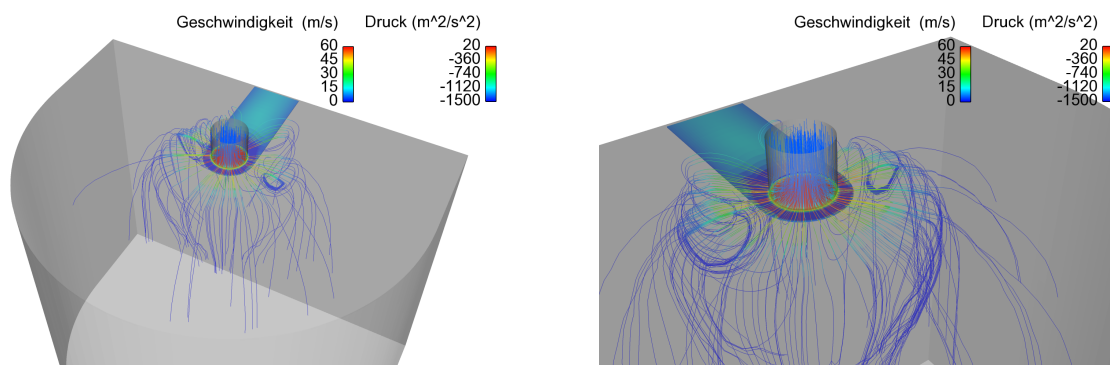


Abbildung 6.26: Druckverteilung auf dem Ventil und Stromlinienverlauf im Berechnungsgebiet zum Zeitpunkt  $t = 9,375e-4$  s

Für die Gegenüberstellung aller Rechnungen wird die Axialkraft auf dem Ventil über der Zeit aufgetragen. Zunächst werden nur die Ausgangsnetze mit einem Seitenverhältnisse  $AR < 1000$  betrachtet. Abbildung 6.27 zeigt die Axialkraft über der Zeit für eine Periode. Insgesamt sind zehn Perioden berechnet worden.

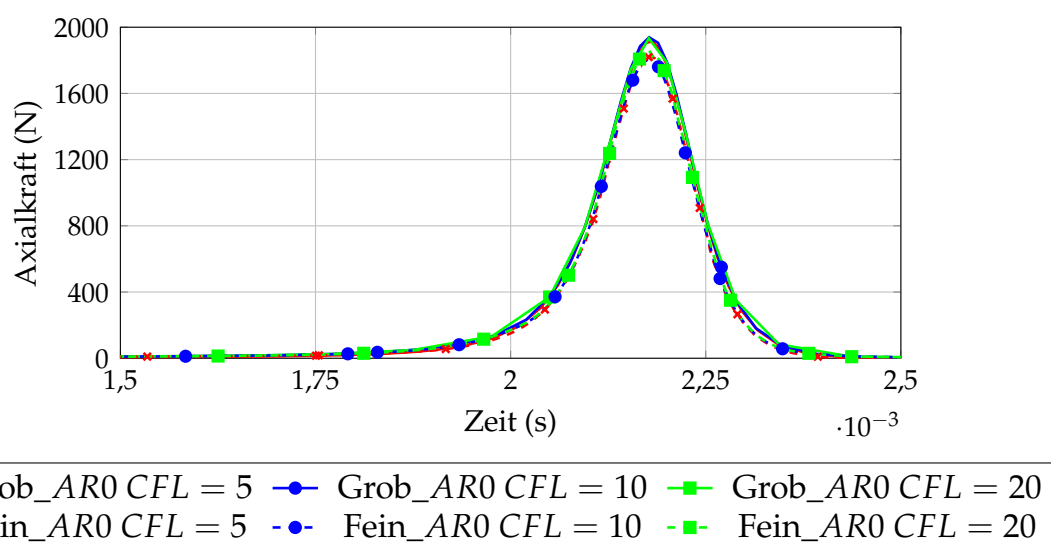


Abbildung 6.27: Axialkraft auf dem Ventil aufgetragen über der physikalischen Zeit

Bei vollständig geschlossenem Ventil resultieren im groben Netz maximale Kräfte von 1900 N. Es sind nur kleine Abweichungen in der maximalen Axialkraft bei unterschiedlichen  $CFL$ -Zahlen zu sehen. Die maximale Axialkraft auf dem feinen Netz ist um 5,3 % geringer als auf dem groben Netz.

Eine Untersuchung mehrerer Perioden zeigt, dass bereits nach zwei Schließungsvorgängen die Strömung eingeschwungen ist. Der Unterschied der Axialkraft zwischen der ersten und zweiten Periode liegt unterhalb von 2 %. Die Rechenzeiten für eine Periode pro Kern sind in Abhängigkeit der  $CFL$ -Zahl in Abbildung 6.28 dargestellt.

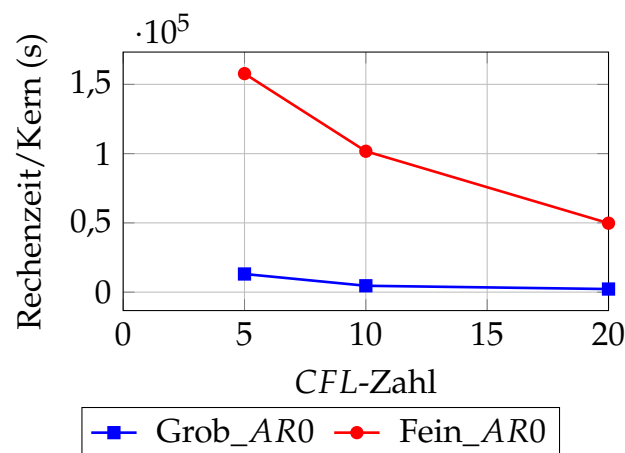


Abbildung 6.28: Übersicht der Netzstufen, der  $CFL$ -Zahlen und der Rechenzeit pro Kern für eine Periode für die Ventilschwingung

Die Zeitschritte in der Berechnung werden über die dimensionslose  $CFL$ -Zahl gesteuert. Daher ergeben sich auf Grund der hohen Anzahl an Elementen und kleiner Kantenlängen auf dem feinen Netz sehr kleine Zeitschritte. Die Rechenzeiten sind so um ein Vielfaches höher als auf dem groben Netz. Die Ergebnisse vom feinen Netz werden daher nur zur Abschätzung der Abweichungen aus der räumlichen Diskretisierung herangezogen. Die Studie der Seitenverhältnisse beschränkt sich auf das grobe Netz. Sowohl auf dem feinen, wie auch auf dem groben Netz gilt als Abbruchkriterium der äußeren Schleife ein Residuum im Druck kleiner  $1e-5$  und in der Geschwindigkeit kleiner  $1e-6$ . Diese Kriterien werden auf beiden Netzen erreicht.

Anhand der letzten drei Perioden werden die Fourier-Koeffizienten der Axialkraft ermittelt. Die Koeffizienten sind in Abbildung 6.29 für die Rechnung Grob\_AR0 mit  $CFL = 5$  zu sehen. Es zeigen sich klare Frequenzpeaks bei Vielfachen der Grundfrequenz  $f = 800$  Hz. Das Verhältnis der Amplitude der 13ten- zur 1ten-Mode liegt immer noch bei 1 %. Daraus folgt, dass eine höhere Anzahl von Harmonischen notwendig ist, um die Strömung abzubilden.



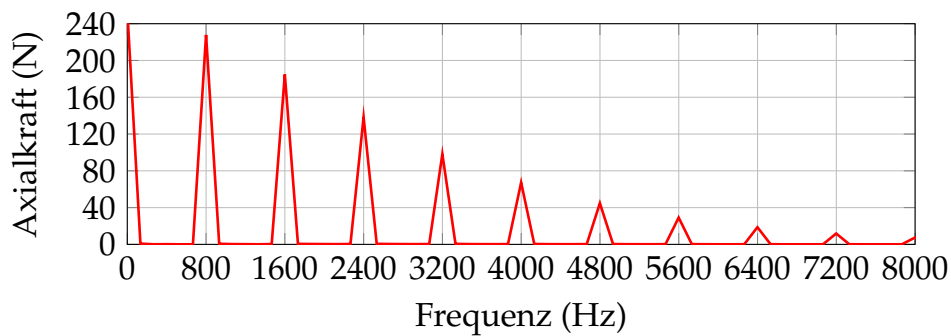


Abbildung 6.29: Fourier-Koeffizienten der Axialkraft auf dem Netz Grob\_AR0 bei  $CFL = 5$

Nun werden die Ergebnisse auf dem groben Netz mit höheren Seitenverhältnissen untersucht. Bei  $CFL = [10; 20]$  brechen die Rechnungen ab. Es werden nur bei einer  $CFL$ -Zahl von fünf Ergebnisse erzielt. Bei diesen Berechnungen zeigt sich im Vergleich zu den Netzen ohne hohe Seitenverhältnisse, dass innerhalb des Druckkorrektur-Schrittes mehr lineare Löser-Iterationen benötigt werden. Außerdem werden auch pro physikalischen Zeitschritt mehr Druckkorrektur-Iteration durchlaufen. Die steigende Anzahl an Iterationen kann auch anhand der Rechenzeit beobachtet werden. In Abbildung 6.30 ist für das Ausgangsnetz Grob\_AR0  $CFL = 5$  und das Netz mit höheren Seitenverhältnissen Grob\_AR1  $CFL = 5$  die Rechenzeit über der physikalischen Zeit aufgetragen. Der minimale Spalt zwischen Ventil und Gehäuse wird zur Zeit  $t = 9,375e-4$  erreicht. Bei dem Netz Grob\_AR1  $CFL = 5$  erhöht sich die Rechenzeit stark, vor allem bei minimalem Spalt. Mit Schließen des Ventils steigt die Geschwindigkeit am Ventil an, daher wird die Zeitschrittweite reduziert. Da die Zeitschrittweite über die Bedingung  $\Delta t = \frac{5 \cdot \Delta x}{u}$  gesteuert wird, resultieren bei höheren Seitenverhältnissen kleinere Zeitschrittweiten. Die Rechenzeit des Netzes mit hohen Seitenverhältnissen steigt daher stärker als die Rechenzeit des Ausgangsnetzes.

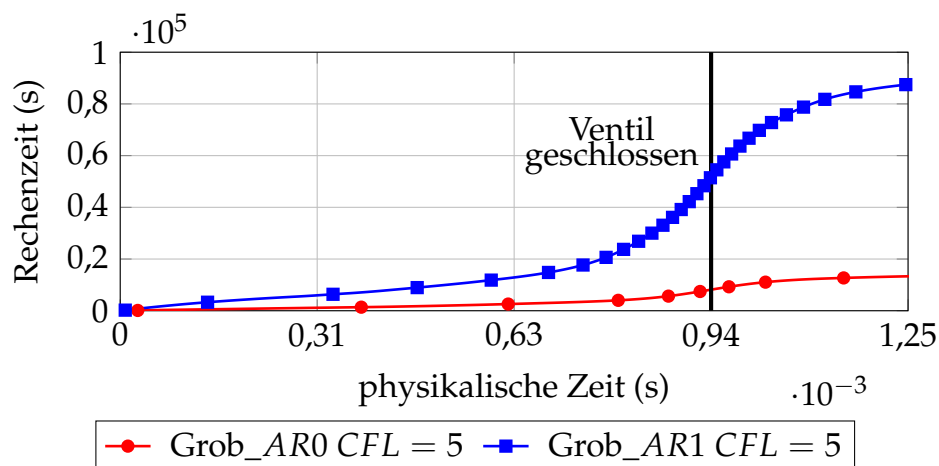


Abbildung 6.30: Rechenzeit über der Zeit für die Ventilschwingung

Die Axialkräfte auf dem groben Netz bei unterschiedlichen Seitenverhältnissen und auf dem feinen Netz sind in Abbildung 6.31 zu sehen. Die Simulation Grob\_AR1  $CFL = 5$  hat einen geringeren Peak als die Simulation Grob\_AR0  $CFL = 5$ . Die Unterschiede resultieren aus den hohen Seitenverhältnissen am Ventil.

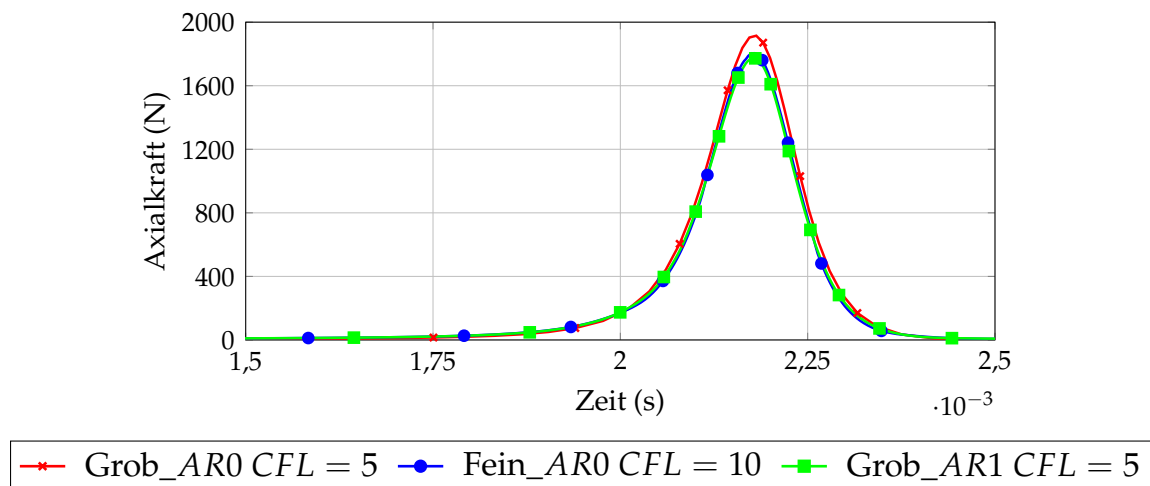


Abbildung 6.31: Axialkraft auf dem Ventil für höhere Seitenverhältnisse

Ein Ventilschwingen kann zuverlässig mit Zeitschrittverfahren berechnet werden. Es zeigt sich, dass die Konvergenzeigenschaften von Zeitschrittverfahren sich mit zunehmenden Seitenverhältnissen reduzieren. Nur bei hinreichend kleinen dimensionslosen Zeitschrittweiten werden Ergebnisse erzielt. Es sind erhebliche Rechenzeiteinbußen durch die hohen Seitenverhältnisse in Kauf zu nehmen und es treten Unterschiede in der maximalen Axialkraft auf dem Netz mit hohen AR gegenüber dem Ausgangsnetz auf.

### 6.3.3 Berechnungen mit zeitspektralen Verfahren

Abschließend werden die Ergebnisse des zeitspektralen Löses betrachtet. In Abbildung 6.32 ist die Axialkraft der zeitspektralen Berechnungen und der Rechnung mit Zeitschrittverfahren für die Netze Grob\_AR0 und Grob\_AR1 mit  $CFL = 5$  aufgetragen.

Der zeitliche Verlauf wurde bei den zeitspektralen Verfahren aus den Fourier-Koeffizienten berechnet. Auf dem Netz Grob\_AR0 ist bei allen zeitspektralen Rechnungen über den Zeitverlauf ein deutlicher Peak in der Axialkraft zu sehen. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischer nähert sich der Verlauf den Ergebnissen aus der Rechnung mit dem Zeitschrittverfahren an.

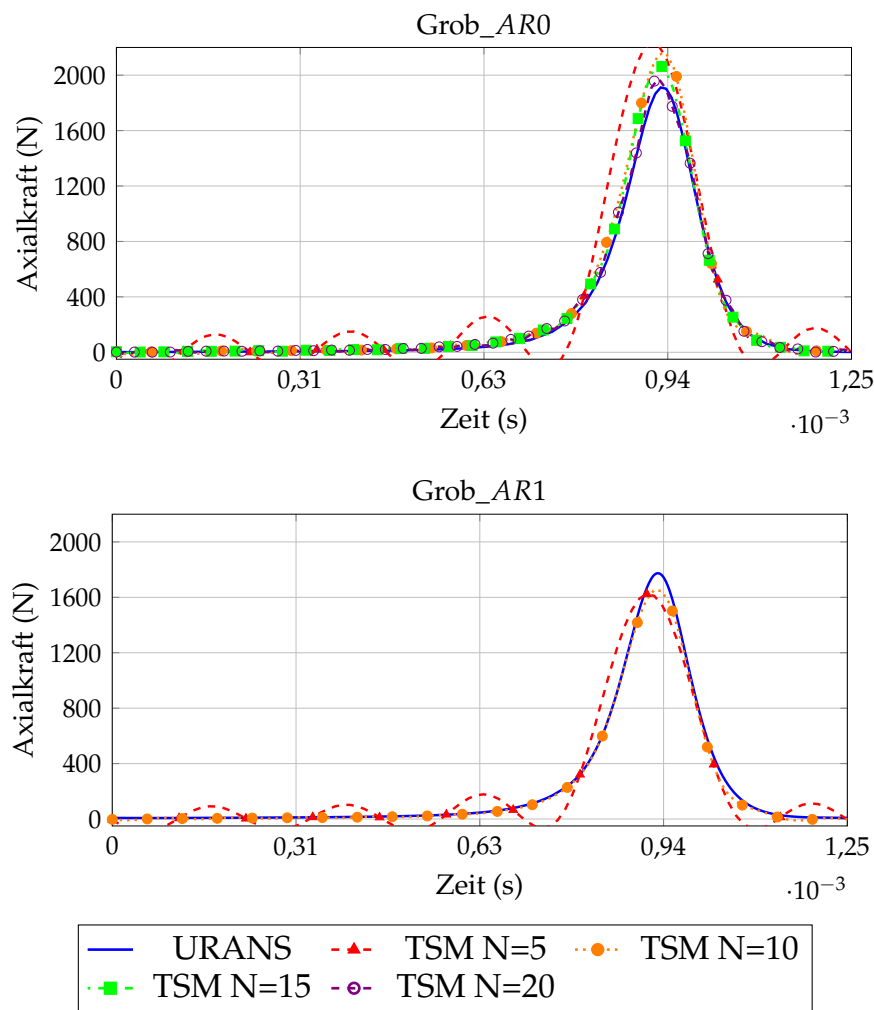


Abbildung 6.32: Oben: Axialkraft auf dem Netz Grob\_AR0 für herkömmliche Zeitschrittverfahren und zeitspektrale Verfahren; Unten: Axialkraft auf dem Netz Grob\_AR1 für herkömmliche Zeitschrittverfahren und zeitspektrale Verfahren (Alle Rechnungen sind mit einem Unterrelaxationsfaktor von  $\alpha_u = 0,5$  durchgeführt.)

Auf dem Netz Grob\_AR1 zeigt sich ein anderes Bild. Die Funktionsverläufe von TSM  $N = 15$  und  $N = 20$  zeigen starke Schwankungen. Mit einem Unterrelaxationsfaktor von  $\alpha_u = 0,5$  wird bei den Rechnungen mit 15 und 20 Harmonischen keine Konvergenz in der Axialkraft erzielt. Auch bei einer Reduzierung des Unterrelaxationsfaktors auf  $\alpha_u = 0,3$  zeigen sich bei  $N = [15; 20]$  keine besseren Ergebnisse. Nur die zeitlichen Verläufe mit fünf und zehn Harmonischen bilden den Verlauf aus Zeitschrittverfahren annäherungsweise ab.

Zur besseren Vergleichbarkeit aller Rechnungen wird die Axialkraft  $k_a$  in den Frequenzraum transformiert und anschließend über alle Frequenzen integriert. Das Impulsintegral ergibt sich zu

$$\hat{K}_a = \int_{f=0}^{f_1} \int_{t=0}^T |k_a(t)| e^{-i2\pi ft} dt df. \quad (6.9)$$

Die relativen Abweichungen in dem Impulsintegral zwischen zeitspektralen Rechnungen und Zeitschrittverfahren sind in Abbildung 6.33 aufgetragen. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen reduziert sich der Unterschied zwischen Zeitschrittverfahren und zeitspektralem Verfahren. Die Abweichungen auf beiden Netzen unterscheiden sich jedoch, so ist die Abweichung auf dem Netz Grob\_AR1 kleiner als auf dem Netz Grob\_AR0. Dies ist zum einen auf die Referenzrechnungen zurück zu führen und zum anderen auf die unterschiedlichen Druckkorrektur-Residuen, die bei den zeitspektralen Rechnungen auf beiden Netzen erreicht werden. Auch mit 20 Harmonischen treten auf dem Netz Grob\_AR0 immer noch Abweichungen von 4 % in der Axialkraft auf. Mit zunehmenden Harmonischen können die Abweichungen weiter reduziert werden.

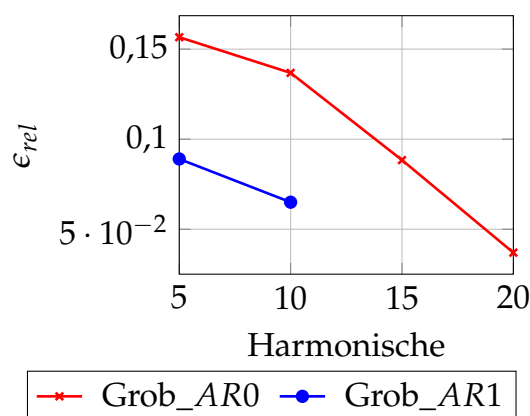


Abbildung 6.33: Relative Abweichung in dem Impulsintegral zwischen den zeitspektralen Rechnungen und dem Zeitschrittverfahren für die Ventilschwingung

Zur Beurteilung der Konvergenzeigenschaften werden die Residuenverläufe herangezogen. In Abbildung 6.34 sind diese logarithmisch für die zeitspektralen Rechnungen über die äußeren Druckkorrektur-Iterationen aufgetragen.

Die Residuen der einzelnen Rechnungen weisen ähnliche Verläufe auf. Nach 400 Iterationen wird ein konstantes Plateau erreicht. Das äußere Residuum reduziert sich

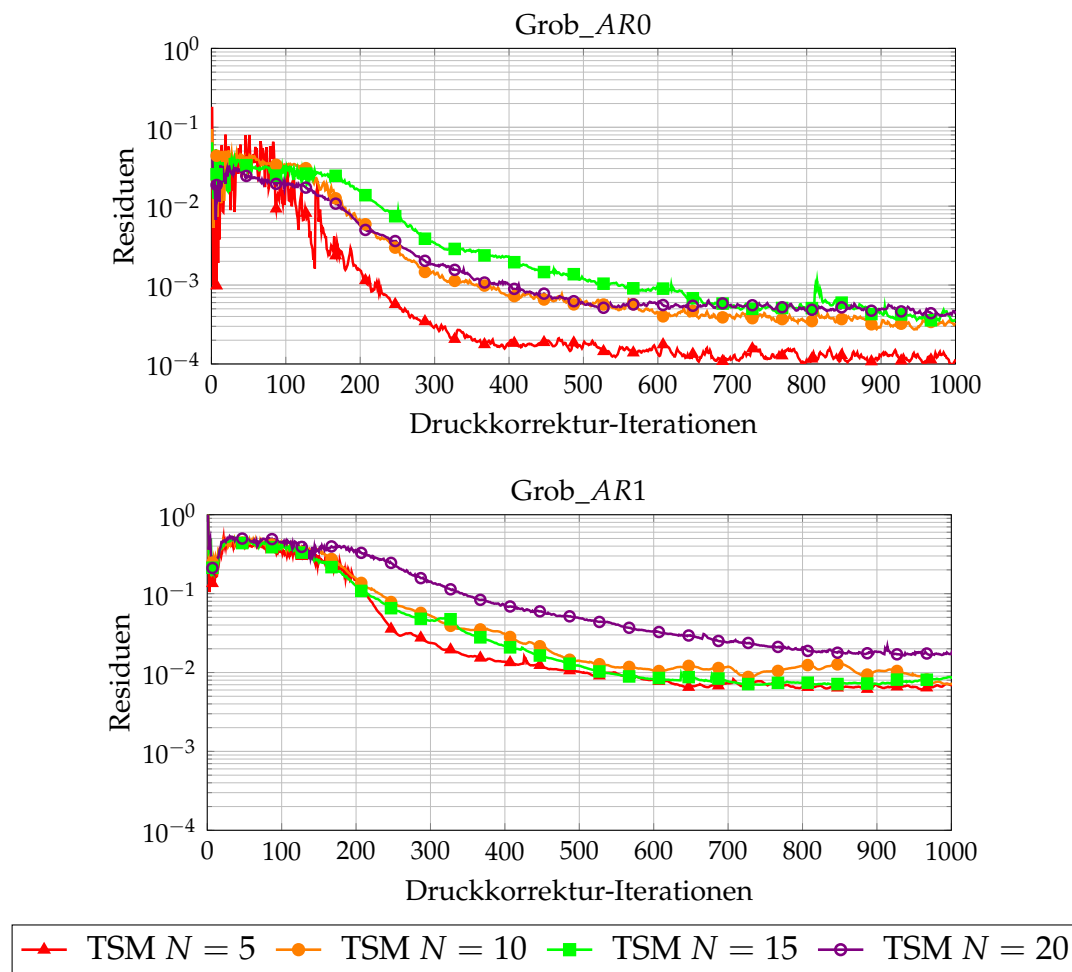


Abbildung 6.34: Oben: Residuen für die zeitspektralen Rechnungen mit einem Unterrelaxationsfaktor  $\alpha_u = 0,5$  auf dem Netz Grob\_AR0 für die Ventilschwingung; Unten: Residuen für die zeitspektralen Rechnungen mit einem Unterrelaxationsfaktor  $\alpha_u = 0,5$  auf dem Netz Grob\_AR1 für die Ventilschwingung

insgesamt um drei Größenordnungen. Es zeigt sich auch ein Anstieg des Residuums mit höheren Harmonischen. Die Rechnung mit fünf Harmonischen zeigt in den ersten 200 Iterationen zudem starke Schwankungen. Das vorgegebene Abbruchkriterium, ein äußeres Residuum kleiner  $1e-6$ , wird nicht erreicht. Die Simulationen werden daher nach 2000 Iterationen abgebrochen und ausgewertet. Danach ist die Axialkraft an den Zeitinstanzen konstant.

In Abbildung 6.34 im unteren Diagramm sind für alle zeitspektralen Rechnungen auf dem Netz Grob\_AR1 die Residuen über die äußeren Iterationen zu sehen. Keiner der Verläufe erreicht Residuen unterhalb von  $1e-2$ . Vor allem der Verlauf mit 20 Harmonischen liegt deutlich oberhalb der anderen Verläufe. Alle Residuen zeigen zudem starke Schwankungen in den ersten 200 Iterationen.

Zuletzt wird noch die Rechenzeit der zeitspektralen Rechnungen den Zeitschrittverfahren gegenübergestellt. Hier ist zu beachten, dass es sich dabei nur um einen Indikator handelt, da die Residuen der zeitspektralen Rechnungen nur um 2–4 Größenordnungen reduziert werden konnten. In Abbildung 6.35 ist das Verhältnis der Rechenzeiten der zeitspektralen Rechnungen zu der Rechenzeit des Zeitschrittverfahrens mit  $CFL = 5$  auf dem groben Netz zu sehen. Für die zeitspektralen Rechnungen wurde die Rechenzeit für 2000 Iterationen ermittelt. Ein Rechenzeitgewinn gegenüber Zeitschrittverfahren mit  $CFL = 5$  ist nur bis zu einer Anzahl von sieben Harmonischen möglich. Bei  $CFL = 20$  sind die Zeitschrittverfahren um einen Faktor 4,8 schneller als zeitspektrale Verfahren mit fünf Harmonischen.

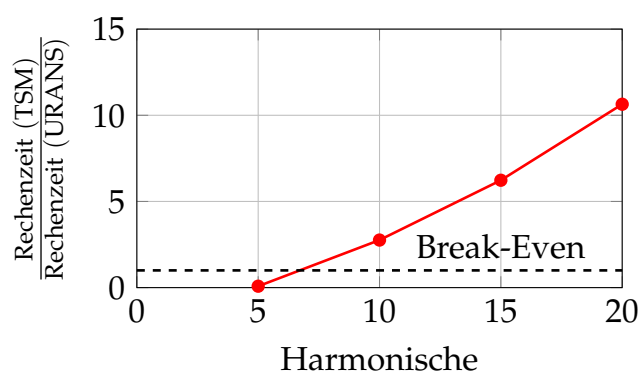


Abbildung 6.35: Verhältnis der Rechenzeit von TSM zu URANS mit  $CFL = 5$  auf dem groben Netz in Abhängigkeit der Harmonischen für die Ventilschwingung

In diesem Abschnitt wurde anhand einer Ventilschwingung gezeigt, dass der zeitspektrale Löser auch komplexe Strömungen hoher Frequenzen auflösen kann. Eine gute Abbildung der Ergebnisse des Zeitschrittverfahrens ist erst mit vielen Harmonischen möglich. Daher ist in dem vorliegenden Berechnungsfall kein Rechenzeitgewinn gegenüber Zeitschrittverfahren realisierbar. Außerdem wurde die Sensitivität des zeitspektralen Löser hinsichtlich räumlicher Seitenverhältnisse bewertet. Während erhöhte Seitenverhältnisse mit Zeitschrittverfahren effizient berechenbar sind und über zusätzliche Druckkorrektur-Schleifen abgefangen werden, führen die hohen Seitenverhältnisse im zeitspektralen Löser zu Problemen. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen kann der vorliegende Fall nicht mehr robust berechnet werden. Hohe Seitenverhältnisse zusammen mit bestimmten Stromaufwärts-Diskretisierungsverfahren führen zu einer Beschränkung der maximalen Zeitschrittweite und schlechteren Konvergenzeigenschaften [14]. Zusammen mit der zeitspektralen Diskretisierung der Zeitableitung führt dies zu Problemen im linearen Löser. Die vorliegende Implementierung in OpenFOAM® ist nicht in der Lage dies abzufangen. Daher muss bei Verwendung des zeitspektralen Löser gesondert auf die Qualität des Netzes, für die das Zellseitenverhältnis ein Indikator ist, geachtet werden.

---

## 7 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung, Erprobung und Bewertung eines zeitspektralen Löser für inkompressible Fluide in dem offenen Strömungslöser OpenFOAM®. Mit diesem Programm ist es möglich viskose, inkompressible, periodische Strömungen effizient zu lösen. Die instationären Navier-Stokes-Gleichungen wurden dazu mit der Time Spectral Method diskretisiert und darüber hinaus wurden unterschiedliche Lösungsstrategien zur Lösung des nichtlinearen, periodischen Systems untersucht.

Der Hauptteil dieser Arbeit gliedert sich in zwei thematische Schwerpunkte. Es wurden zum einen unterschiedliche Lösungsstrategien des zeitspektralen Systems entwickelt und diese in den Punkten Berechnungszeit, Parallelisierung, Konvergenzverhalten und Speichereffizienz gegenübergestellt. Zum anderen lag der Schwerpunkt auf der differenzierten Analyse verschiedener periodischer Strömungsprobleme. Im Vordergrund stand dabei die Identifizierung der Frequenzanteile im Strömungsfeld und der Abgleich mit den zeitspektralen Ergebnissen.

Zunächst wurden die Time Linearized Frequency Domain Method und die Time Spectral Method vorgestellt. Die TSM ist geeignet um komplexe Strömungsprobleme zu lösen und wurde daher in dieser Arbeit weiterverfolgt. Zuerst wurden deren primäre Eigenschaften untersucht. Anschließend wurde ein Bezug zu den Navier-Stokes-Gleichungen hergestellt. Darauf folgend wurden Zeitschrittverfahren und TSM anhand einer einfachen Advektionsgleichung analysiert und die Unterschiede beider Verfahren dargelegt. In der Gegenüberstellung zeigte sich, dass die Konvergenzeigenschaften bei der TSM schlechter waren als bei regulären Zeitschrittverfahren. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen und steigender Grundfrequenz reduzieren sich die Konvergenzeigenschaften. Auf Basis dieser Betrachtungen wurde deutlich, dass ein Fokus auf die Vorkonditionierer und linearen Löser des gekoppelten, zeitspektralen Systems zu legen ist.

Auf diese Untersuchungen folgte die Implementierung der TSM in die Lösungsverfahren für inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Zur Lösung des nichtlinearen Systems wurde der SIMPLE-Algorithmus gewählt. Bei diesem werden die Impulsgleichungen der einzelnen Kollokationspunkte gekoppelt gelöst. Vier unterschiedliche Ansätze wurden verfolgt. Im ersten Ansatz wurden alle räumlichen Felder eines Kollokationspunktes zusammen gekoppelt und über ein Jacobi-Verfahren gelöst. Dies erlaubte eine einfache Implementierung in den vorhandenen Löser, allerdings zeigte der gewählte Ansatz mit zunehmenden Harmonischen eine starke

---

Degradierung in den Konvergenzeigenschaften. Daher wurde im zweiten Ansatz das Impulssystem nach den Kollokationspunkten umsortiert und das System über ein Block-Gauß-Seidel-Verfahren mit direkter Block-Invertierung gelöst. Dieser Ansatz zeigte bessere Konvergenzeigenschaften, jedoch blieb die Recheneffizienz weit hinter Zeitschrittverfahren zurück. Im dritten Ansatz wurden alle räumlichen und zeitlichen Terme in einem Matrixsystem nach den Kollokationspunkten sortiert und mit einem GMRES gelöst. Die Vorkonditionierung des Systems erfolgte mit einer diagonal-inkompletten LU-Zerlegung, wo zunächst die zeitspektralen Terme vernachlässigt wurden. Im vierten Ansatz wurden auch die Kopplungsterme im Vorkonditionierer berücksichtigt. Die Lösung des gekoppelten Impulssystems erfolgte hier in der externen Bibliothek PETSc.

An die Entwicklung und Implementierung schloss sich die Beurteilung der Ergebnisse der zeitspektralen Methode an. Die Löser wurden anhand von drei einfachen Beispielen getestet und gegenübergestellt. Zum einen wurde eine stationäre Couette-Strömung berechnet, um den Grenzfall der stationären Strömung mit den zeitspektralen Lösern zu bewerten. Die Ergebnisse zeigten, dass alle zeitspektralen Implementierungen die analytische Lösung wiedergeben. Anschließend wurde eine höhere Anregung am inneren Zylinder vorgegeben und gezeigt, dass mehrere Harmonische zur korrekten Abbildung der Ergebnisse der Zeitschrittverfahren notwendig sind. Im dritten Beispiel wurde die laminare Strömung um ein oszillierendes NACA0012-Profil untersucht. Eine Fourier-Analyse der Ergebnisse der Zeitschrittverfahren zeigte, dass durch die Nichtlinearität höhere Frequenzen als nur die Anregungsfrequenz des Profils auftreten. Dies stimmte auch mit den Ergebnissen der zeitspektralen Berechnungen überein. Mit zunehmender Anzahl an Harmonischen reduzieren sich die Abweichungen zwischen Zeitschrittverfahren und zeitspektralen Verfahren. Das zeitspektrale Verfahren zeigt bei geringen Harmonischen einen Rechenzeitgewinn gegenüber Zeitschrittverfahren. Jedoch erhöht sich mit zunehmenden Harmonischen der Speicheraufwand enorm. Zusätzlich wurde anhand des dritten Testfalles gezeigt, dass der vollgekoppelte Lösungsansatz am besten für Anwendungen in der Industrie geeignet ist, da er von allen zeitspektralen Lösern die höchste Robustheit zeigt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden drei komplexere Strömungsphänomene untersucht. Diese umfangreichen Analysen dienten dazu, die Grenzen der zeitspektralen Methode und mögliche Entwicklungsrichtungen aufzuzeigen. Zunächst wurde das NACA0012-Profil mit mehreren Frequenzen angeregt und die Strömungsfelder berechnet. Eine Modalanalyse des Strömungsfeldes zeigte die einzelnen Frequenzanteile. Vor allem in der Abströmung tauchten komplexe Strukturen hoher Frequenzen auf. Das Abströmfeld konnte daher erst mit einer hohen Anzahl an Harmonischen voll ausgebildet werden. Die integralen Kennwerte hingegen waren auch mit wenigen Harmonischen gut abbildbar. Es zeigte sich in diesem Fall, dass der Rechenzeitgewinn von zeitspektralen Verfahren gegenüber Zeitschrittverfahren abhängig von der Fragestellung ist. Integrale Kennwerte können effizient mit dem zeitspektralen Löser berechnet werden, aber die Berechnung der Strukturen im Abströmfeld



ist mit Zeitschrittverfahren schneller. Bei dem zweiten Testfall wurde die turbulente Umströmung eines Propellers in Scherströmung simuliert. Durch die Wechselwirkung der einzelnen Schaufeln zeigten sich hohe Vielfache der Grundfrequenz. Zur Abbildung des Zeitverlaufs des Schubbeiwertes waren mehrere Vielfache der Blattfolgefrequenz notwendig. Zuletzt wurde die Sensitivität des zeitspektralen Löser hinsichtlich Netzgüte anhand einer Ventilschwingung bewertet. Zunehmende Seitenverhältnisse in den KV führten bei hohen Harmonischen zu schlechteren Konvergenzeigenschaften. Dies war bei Zeitschrittverfahren weniger kritisch.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass ein Rechenzeitgewinn durch zeitspektrale Löser für einige Anwendungsfälle nachgewiesen werden kann. Der Speicheraufwand im Vergleich zu Zeitschrittverfahren erhöht sich mit zunehmenden Harmonischen jedoch deutlich. Die Konvergenzeigenschaften des zeitspektralen Löser reduzieren sich mit hohen Frequenzen, hoher Anzahl von Harmonischen und abnehmender Netzgüte, was vor allem bei Industriefällen zu einer Einschränkung der Nutzbarkeit führt. Grundlegende Untersuchungen der Strömungsstrukturen können mit dem zeitspektralen Löser meist nicht erfolgen, da viele Harmonische notwendig sind, diese die Rechenzeit stark erhöhen und so kein Rechenzeitgewinn zu Zeitschrittverfahren zu verzeichnen ist. Allerdings können integrale Kenngrößen, wie z.B. die Axialkraft, auch mit geringer Anzahl an Harmonischen besser als mit stationären Berechnungen bestimmt werden.

---

## 8 Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt das Potenzial als auch die Grenzen für Berechnungen periodischer, inkompressibler, turbulenter Strömungen mittels der TSM auf. Eine Weiterentwicklung der Algorithmen wird von der Autorin als sinnvoll bewertet. Die aktuelle Implementierung des Block-Gauß-Seidel-Verfahrens mit direkter Block-Invertierung kann dabei als Ausgangspunkt dienen. Hier sind ausführliche Studien notwendig, um zu prüfen, dass eine Reduzierung der Schleifen über die Defektkorrektur und eine andere Implementierung des direkten Löser zu einer Erhöhung der Rechenzeiteffizienz führen. Dieser Löser bietet außerdem eine gute Möglichkeit verschiedene Parallelisierungsstrategien zu verfolgen. Auch eine Anpassung der Vorkonditionierer und Löser in OpenFOAM® ist denkbar. Momentan wird die höchste Recheneffizienz durch Kopplung einer externen Bibliothek erreicht. Eine Erweiterung der Funktionen und Methoden in OpenFOAM® führt nach Ansicht der Autorin zu gesteigerter Effizienz. Innerhalb dieser Arbeit wurden nur die Löser der Impulsgleichung angepasst. Es zeigt sich jedoch auch eine Zunahme der Löser-Iterationen der Druckkorrekturgleichung bei steigenden Harmonischen. Auch hier ist zu klären, ob andere Vorkonditionierer und Löser besser geeignet sind.

Neben den Potenzialen in Numerik und Implementierung der TSM kann auch eine Kombination der TSM mit adjungierten Systemen erfolgen. Das Adjugiertenverfahren zur Formoptimierung hat in den letzten Jahren auch im industriellen Umfeld enorm an Bedeutung gewonnen. Es ist denkbar, die zeitspektrale Diskretisierung auch für instationäre, adjungierte Verfahren zu nutzen. Instationäre, adjungierte Verfahren rechnen in der Zeit rückwärts. Die Strömungsfelder der primalen Rechnung müssen daher in festgelegten Abständen gespeichert werden. Bei der TSM liegt das gesamte zeitliche Feld in Form von Fourier-Koeffizienten vor. Das adjungierte Verfahren kann daher von dem auskonvergierten, periodischen System starten. Die primale Rechnung ist abgeschlossen und ein zusätzliches rückwärtsgerichtetes Rechnen entfällt. Ein solches Verfahren kann zur instationären Berechnung von Wasserpumpen mit dem Ziel Druckpulsationen zu reduzieren genutzt werden.

Neben der adjungierten Optimierung eignet sich die TSM generell als Bestandteil eines automatisierten Prozesses. Im Pumpenauslegungsprozess werden parametrisierte Laufrad- und Spiraldaten auf höchsten Wirkungsgrad optimiert. Der Pumpenwirkungsgrad wird anhand einer stationären 3D-CFD-Simulation im Relativsystem ermittelt. Statt einer stationären Berechnung kann auch mit der TSM gerechnet werden und neben Wirkungsgrad und Druckdifferenz nach Druckpulsationen bzw. andere zeitliche Größen optimiert werden.

---

# Literaturverzeichnis

- [1] OpenFOAM - The open source CFD toolbox. <http://www.openfoam.com>. Zugriff am: 07.02.2017.
- [2] AESCHLIMAN, D., W. OBERKAMPF und F. BLOTTNER: A proposed methodology for computational fluid dynamics code verification, calibration, and validation. In: Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities, 1995. ICIASF '95 Record., International Congress on, Seiten 27/1–2713, Juli 1995.
- [3] ALLMARAS, S., T. FORRESTER und P. SPALART: Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model. In: Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), 2012.
- [4] ANDERECK, C., S. LIU und H. SWINNEY: Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 164:155–183, März 1986.
- [5] ANDERSON, J.: Computational Fluid Dynamics. McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [6] ANDERSON, W. und D. BONHAUS: Navier-Stokes computations and experimental comparisons for multielement airfoil configurations. AIAA-93-0645, Seiten 1–9, 1993.
- [7] ANKER, J., J. MAYER und H. STETTER: A Preconditioned Solution Scheme for the Computation of Compressible Flow in Turbomachinery at Arbitrary Mach Numbers. Task Quarterly, 6(1):143–176, 2002.
- [8] ANTHEAUME, S.: Implicit Time Spectral Method for Time-Periodic Incompressible Flows. Dissertation, Universite de Grenoble, 2010.
- [9] AUZINGER, W.: Defect Correction for Nonlinear Elliptic Difference Equations. Numerische Mathematik, 51:199 – 208, 1987.
- [10] BALAY, S., S. ABHYANKAR, M. ADAMS, J. BROWN, P. BRUNE, K. BUSCHELMAN, L. DALCIN, V. EIJKHOUT, W. GROPP, D. KAUSHIK, M. KNEPLEY, L. MCINNES, K. RUPP, K. SMITH, S. ZAMPINI und H. ZHANG: PETSc Web page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2015.
- [11] BAUMBACH, S.: Towards a Segregated Time Spectral Solution Method for Incompressible Viscous Flows. In: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2015.

- 
- [12] BAUMBACH, S.: Investigation of various solution strategies for the time-spectral method for incompressible, viscous flows. Applied Mathematical Modelling, 44:223 – 235, 2017.
- [13] BAUMBACH, S. und A. STÜCK: Time Spectral Solution Method for incompressible viscous flows in industrial applications. In: NAFEMS - Neue Methoden in der numerischen Strömungsberechnung (CFD) - Alternativen zu Finite-Volumen-Methoden?, 2018.
- [14] BUELOW, P.E.O., S. VENKATESWARAN und C.L. MERKLE: Stability and convergence analysis of implicit upwind schemes. Computers and Fluids, 30(7):961 – 988, 2001.
- [15] BUTSUNTORN, N.: Time Spectral Method for Rotorcraft Flow with Vorticity Confinement. Dissertation, Stanford University, 2008.
- [16] CHORIN, A.: A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. Journal of Computational Physics, 135:118 – 125, 1967.
- [17] CHORIN, A.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. Mathematics of Computation, 22(104):745–762, 1968.
- [18] COCHELIN, B. und C. VERGEZ: Non-uniform time sampling for multiple-frequency harmonic balance computations. Journal of Computational Physics, Seiten 2 – 40, 2012.
- [19] CVIJETIC, G., H. JASAK und V. VUKCEVIC: Finite Volume Implementation of the Harmonic Balance Method for Periodic Non-Linear Flows. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Seiten 1–21, 2016.
- [20] DA RONCH, A., J. MCCracken, K. BADCOCK, M. WIDHALM und M. CAMPOBASSO: Linear Frequency Domain and Harmonic Balance Predictions of Dynamic Derivatives. Journal of Aircraft, 50(3):694 –707, 2013.
- [21] DISKIN, B. und J. THOMAS: Effects of mesh irregularities on accuracy of finite-volume discretization schemes. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Seiten 1 – 18, 2012.
- [22] DONEA, J., A. HUERTA, J. PONTHOT und A. RODRIGUEZ-FERRAN: Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. Encyclopedia of Computational Mechanics, 1:2–25, 2004.
- [23] DWIGHT, R., P. LUCAS und H. BIJL: Solution Methods and Acceleration Techniques in Computational Fluid Dynamics (CFD). John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [24] EKICI, K., K. HALL und E. DOWELL: Computationally fast harmonic balance methods for unsteady aerodynamic predictions of helicopter rotors. Journal of computational Physics, 227:6206 – 6225, 2008.

- [25] EULITZ, F. und K. ENGEL: Numerical Investigation of Wake Interaction in a Low Pressure Turbine. ASME 1998 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, 1998.
- [26] FERZIGER, J. und M. PERIĆ: Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 2002.
- [27] GENTILLI, N.: Efficient Solution of Unsteady Nonlinear Flows Using a Multiple Zone Harmonics Balance Technique. Dissertation, Duke University, 2010.
- [28] GERSCHGORIN, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Bulletin de l'Academie des Sciences de l'URSS, 6:749–754, 1931.
- [29] GOPINATH, A.: Efficient Fourier-Based Algorithms for Time-Periodic unsteady problems. Dissertation, Stanford University, 2007.
- [30] HALL, K.: A linearized Euler analysis of unsteady flows in turbomachinery. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
- [31] HALL, K. und E. CRAWLEY: Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized Euler equations. AIAA Journal, 27(6):777 – 787, 1989.
- [32] HALL, K., J. THOMAS und W. CLARK: Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique. AIAA Journal, 40(5):879 – 886, 2002.
- [33] HALL, K., J. THOMAS, K. EKICI und D. VOYTOVICH: Frequency Domain Techniques for Complex and Nonlinear Flows in Turbomachinery. 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2003.
- [34] HUANG, H.: Shape Optimization of Turbomachinery Blades Using an Adjoint Harmonic Balance Method. Dissertation, University of Tennessee, 2013.
- [35] IM, D., S. CHOI, H. KWON, S. PARK und J. KWON: Rotor Flow Analysis using an Implicit Harmonic Balance Method. World Academy of Science, Engineering and Technology, 55:151 – 157, 2011.
- [36] INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF UNSTEADY AERODYNAMICS, AEROACOUSTICS AND AEROELASTICS OF TURBOMACHINES: Frequency and Time Domain Fluid-Structure Coupling Methods for Turbomachineries. Springer, 2006.
- [37] JAMESON, A.: An Assessment of Dual-Time Stepping, Time Spectral and Artificial Compressibility based Numerical Algorithms for Unsteady Flow with Applications to Flapping Wings. 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, Seiten 1–20, 2009.
- [38] JAMESON, A., W. SCHMIDT und E. TURKEL: Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes, 1981.

- [39] JASAK, H. und Z. TUKOVIC: Dynamic Mesh Handling in OpenFOAM Applied to Fluid-Structure Interaction Simulations. European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2010, Seiten 1–21, 2010.
- [40] KALITZIN, G., G. MEDIC, G. IACCARINO und P. DURBIN: Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions. Journal of Computational Physics, 204:265–291, 2005.
- [41] KIELB, R.: Non-Synchronous Vibration of Turbomachinery Airfoils. Dissertation, Duke University, 2006.
- [42] LESOINNE, M. und C. FARHAT: Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. Computer methods in applied mechanics and engineering, 134(1-2):71–90, 1996.
- [43] LOEHNER, R. und C. YANG: Improved ALE Mesh Velocities for moving bodies. Communications in numerical methods in engineering, 12:599–608, 1996.
- [44] LUDER III, A.: A Block-Jacobi Time-Spectral Method for Incompressible Flow. Dissertation, University of Michigan, 2013.
- [45] MAVRIPLIS, D. und Z. YANG: Time Spectral Method for Periodic and Quasi-Periodic Unsteady Computations on Unstructured Meshes. Math. Model. Nat. Phenom., 6(3):213–236, 2011.
- [46] MAVRIPLIS, D., Z. YANG und N. MUNDIS: Extensions of time spectral methods for practical rotorcraft problems. 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Seiten 1–16, 2012.
- [47] MCMULLEN, M.: The application of non-linear frequency domain methods to the euler and navier-stokes equations. Dissertation, Stanford University, 2003.
- [48] MERLE, A., A. STÜCK und A. REMPKE: Diskret-Adjungierter aerodynamischer Formoptimierungsprozess am Beispiel eines getrimmten Transportflugzeugs mit aktivem Triebwerk. NAFEMS Online-Magazin, Zeitschrift für numerische Simulationsmethoden und angrenzende Gebiete, (43):59–69, Oktober 2017.
- [49] MUNDIS, N. und D. MAVRIPLIS: Quasi-periodic time spectral method for aeroelastic flutter analysis. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting, Seiten 1–15, 2013.
- [50] MUNDIS, N. und D. MAVRIPLIS: Wave-number Independent Preconditioning for GMRES Time-spectral Solvers. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, Seiten 1–21, 2015.
- [51] MUNDIS, N. und D. MAVRIPLIS: Toward an optimal Solver for time-spectral solutions on unstructured meshes. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Seiten 1–31, 2016.

- [52] NADARAJAH, S. und A. JAMESON: Optimum Shape Design for Unsteady Three-Dimensional Viscous Flows Using a Nonlinear Frequency-Domain Method. *Journal of Aircraft*, 44(5), 2007.
- [53] NÜRNBERGER, D. und H. GREZA: Numerical Investigation of Unsteady Transitional Flows in Turbomachinery Components Based on a RANS Approach. *Flow, Turbulence and Combustion*, 69(3):331–353, 2002.
- [54] PATANKAR, S.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [55] PATANKAR, S. und B. SPALDING: A Calculation Procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [56] POPE, S.: Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000.
- [57] RAUSCHENBERGER, P.: Multifrequential Harmonic Balance Technique. Dissertation, Universitaet Stuttgart, 2008.
- [58] REYNOLDS, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous flows and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser.*, 174(A):935 – 982, 1894.
- [59] RICHARDSON, L.: On the Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 83(563):335–336, 1910.
- [60] ROACHE, P.: Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. *Journal of Fluids Engineering*, 116(3):405–413, 1994.
- [61] ROACHE, P.: Quantification of Uncertainty in computational fluid dynamics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 29(123):123–160, 1997.
- [62] SAAD, Y.: Iterative Methods for Sparse linear Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2. Auflage, 2003.
- [63] SCHLICHTING, H. und K. GERSTEN: Grenzschicht-Theorie. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [64] SCHWARZE, R.: CFD-Modellierung. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [65] SHEN, J., T. TANG und L. WANG: Spectral Methods. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [66] SICOT, F., G. PUIGT und M. MONTAGNAC: Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method. *AIAA Journal*, 46(12):2080–3089, 2008.
- [67] SPALART, P. und S. ALLMARAS: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA-Paper 92-0439*, 1992.

- [68] VERDON, J.: Linearized unsteady aerodynamics for turbomachinery aeroelastic applications. *Journal de Physique III*, 2(4):481–506, 1992.
- [69] WELCH, G., I. MILANOVIC und K. ZAMAN: Application of Harmonic Balance Technique in Synthetic Jets in Cross-Flow. 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Engineering, Seiten 1–15, 2005.
- [70] WELLER, H., G. TABOR, H. JASAK und C. FUREBY: A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, 12(6), 1998.
- [71] WHITEHEAD, D.: Vibration and Sound Generation in a Cascade of Flat Plates in Subsonic Flow. A.R.C. R&M, 3865, 1972.
- [72] WIDHALM, M., A.R. HÜBNER und R. THORMANN: Linear Frequency Domain Predictions of Dynamic Derivatives for the DLR F12 Wind Tunnel Model. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2012.
- [73] ZENG, M. und W. TAO: A comparison study of the convergence characteristics and robustness for four variants of SIMPLE-family at fine grids. *Engineering Computations*, 20(3):320–340, 2003.



# Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
Operatoren		
$\Delta$		Laplace-Operator
$\nabla$		Nabla-Operator
$\otimes$		dyadisches Produkt
$\frac{\partial}{\partial x}$	1/m	1. örtliche Ableitung
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	1/m <sup>2</sup>	2. örtliche Ableitung
$\frac{\partial}{\partial t}$	1/s	Zeitableitung
$()^{-1}$		Inverse
$()^T$		Transponierte
$\mathcal{O}$		Fehlerordnung
$ \cdot $		Euklidische Norm
Große Griechische Buchstaben:		
$\Gamma$		Oberfläche
$\Omega$		Kontrollvolumen
Kleine Griechische Buchstaben:		
$\alpha$		Unterrelaxationsfaktor
$\gamma$	Grad	Anstellwinkel
$\delta$		Kronecker-Delta
$\epsilon$		Abweichung/Fehler
$\kappa$		Karmann-Konstante
$\lambda$		Eigenwert
$\mu$	Pa·s	dynamische Viskosität
$\nu$	m/s	kinematische Viskosität
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
$\rho$		spektraler Radius
$\tau$		Pseudozeit
$\tau_w$	N/m <sup>2</sup>	Wandschubspannung
$\phi$		generische Größe
$\omega$	1/s	Winkelgeschwindigkeit
Große lateinische Buchstaben:		
$\mathbf{A}, A_{ij}$		Koeffizientenmatrix
$D$	m	Durchmesser
$\mathbf{D}, d_i$		zeitspektraler Operator
$\mathbf{F}$		Flussvektor

$F_s$		Sicherheitsfaktor
$\mathbf{I}$		Einheitsmatrix
$J$		Fortschrittsgrad
$\mathbf{J}$		Jacobi-Matrix
$\mathcal{K}$		Krylow-Raum
$N$		Harmonische
$\mathbf{Q}$		Quellterm
$\mathbf{R}$		Restterm
$\mathbf{S}, S_{ij}$	1/s	Deformationstensor
$T$	Hz	Periodendauer
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen
$\mathbf{W}$		Erhaltungsgrößen
Kleine lateinische Buchstaben:		
$a$		Amplitude
$c_d$		Widerstandsbeiwert
$c_l$		Auftriebsbeiwert
$c_s$		Schubbeiwert
$f$	Hz	Frequenz
$n$	rad/s	Drehzahl
$\mathbf{n}$		Normalenvektor
$p$	N/m <sup>2</sup>	Druck
$r$	m	Radius
$t$	s	Zeit
$\mathbf{u}, u_i$	m/s	Geschwindigkeit
$u_\tau$	m/s	Schubspannungsgeschwindigkeit
$u^+$		dimensionslose Geschwindigkeit
$u_\infty$	m/s	Anströmgeschwindigkeit
$w$		Wandabstand
$\mathbf{x}, x_i$		Ortsvariablen
$y^+$		dimensionsloser Wandabstand
Kennzeichnungen und Indizes:		
$()_c$		Diagonaleinträge
$()_l$		Nebendiagonaleinträge
$()^k$		Iterationsindex
$()_i$		Komponente
$()^*$		Schätzer
$\overline{()}$		gemittelter Wert
$()'$		Störung
$\hat{()}$		Fourier-Transformierte

# Abkürzungsverzeichnis

Symbol	Bezeichnung
1D/2D/3D	ein-/zwei-/dreidimensional
ALE	Arbitrary Lagrange Euler
AC	Künstliche Kompressibilität
AR	Seitenverhältnis
BCGS	Block-Colored Gauss Seidel Method
BDF	Rückwärts-Differenzen-Formel
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
CPU	Central Processing Unit
DK	Defektkorrektur
DNS	Direkte Numerische Simulation
FD	Finite-Differenzen
FFT	Schnelle Fourier-Transformation
FGMRES	flexible Generalized Minimal Residual Method
FVM	Finite-Volumen-Methode
GCI	Gitterkonvergenz-Index
GMRES	Generalized Minimal Residual Method
HBM	Harmonic Balance Method
iLU	inkomplette LU-Zerlegung
KV	Kontrollvolumen
LES	Grobstruktursimulation
MPI	Message Passing Interface
OpenFOAM	Open Source Field Operation and Manipulation
PISO	Pressure Implicit with Splitting of Operators
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes Equation
$Re$	Reynolds-Zahl
SA	Spalart-Allmaras-Modell
SBM	Solid Body Motion
SGS	Subgrid-Scale-Modell
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SIMPLEC	SIMPLE-Consistent
SIMPLER	SIMPLE-Revised
TLFDM	Time Linearized Frequency Domain Method
TSM	Time Spectral Method
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung benachbarter Kontrollvolumen . . . . .	13
2.2	Schema eines instationären Druckkorrektur-Verfahrens . . . . .	23
3.1	Schema der Verteilung der Kollokationspunkte . . . . .	30
3.2	Verschiebung des Netzes mit dem Laplace- und dem SBM-Verfahren . . . . .	32
3.3	Gegenüberstellung von Zeitschrittverfahren und TSM . . . . .	35
3.4	Maximaler relativer Fehler von BDF und TSM . . . . .	35
3.5	FD-Berechnungsgebiet zur Berechnung der Eigenwerte . . . . .	42
3.6	Spalten-Gerschgorin-Kreise von TSM und Zeitschrittverfahren . . . . .	43
4.1	Berechnungsgebiet bestehend aus neun KV . . . . .	52
4.2	Darstellung der Parallelisierungsstrategie im BGS-Löser . . . . .	57
5.1	Berechnungsgebiet der Couette-Strömung . . . . .	67
5.2	Relativer Fehler der Couette-Strömung verschiedener Löser . . . . .	67
5.3	Druck am inneren Zylinder für die Couette-Strömung . . . . .	68
5.4	Maximale und minimale Auslenkung des NACA0012-Profiles . . . . .	70
5.5	Netzstufen für das NACA0012-Profil . . . . .	71
5.6	Impulsintegral $\hat{C}_l$ über Zeitschritt und KV . . . . .	73
5.7	Relative Abweichung von $\hat{C}_l$ über die Perioden . . . . .	74
5.8	FFT der Beiwerte für das NACA0012-Profil . . . . .	75
5.9	Moden der Geschwindigkeit für das NACA0012-Profil . . . . .	76
5.10	Berechnungszeit verschiedener Zeitschritte für das NACA0012-Profil . . . . .	77
5.11	Beiwerte für das NACA0012-Profil für 1 – 3 Harmonische . . . . .	78
5.12	Beiwerte für das NACA0012-Profil für 4 – 6 Harmonische . . . . .	79
5.13	Relative Abweichung in den Beiwerten für das NACA0012-Profil . . . . .	80
5.14	Residuen für die zeitspektralen Löser auf dem mittleren Netz . . . . .	81
5.15	Residuen für die zeitspektralen Löser auf dem feinen Netz . . . . .	82
5.16	Iterationen und Unterrelaxationsfaktoren für das NACA0012-Profil . . . . .	84
5.17	Iterationen über Unterrelaxationsfaktor für das NACA0012-Profil . . . . .	85
5.18	Speichereffizienz der zeitspektralen Löser für das NACA0012-Profil . . . . .	86
5.19	Berechnungszeit von TSM und Zeitschrittverfahren . . . . .	87
5.20	Gegenüberstellung der zeitspektralen Löser . . . . .	89
6.1	Anstellwinkel für das hoch angeregte NACA0012-Profil . . . . .	91
6.2	Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t = 0$ s . . . . .	92
6.3	Impulsintegral $\hat{C}_l$ über Zeitschritt und KV . . . . .	93

6.4	Relative Abweichung von $\hat{C}_l$ für das hoch angeregte NACA0012-Profil	94
6.5	FFT der Beiwerte für das hoch angeregte NACA0012-Profil . . . . .	94
6.6	Moden der Geschwindigkeit für das hoch angeregte NACA0012-Profil	95
6.7	Geschwindigkeitsfelder für Zeitschrittverfahren und TSM . . . . .	96
6.8	Beiwerte für das hoch angeregte NACA0012-Profil . . . . .	97
6.9	Relative Abweichung in den Impulsintegralen der Beiwerte . . . . .	98
6.10	Berechnungszeitverhältnis für das hoch angeregte NACA0012-Profil	99
6.11	Propeller in Seit- und Frontansicht . . . . .	100
6.12	Vernetzung am Propeller . . . . .	101
6.13	Geschwindigkeitsfeld um den Propeller zum Zeitpunkt $t = 0$ s . . .	103
6.14	Schubbeiwert über der Zeit für die Propellerströmung . . . . .	104
6.15	Impulsintegral $\hat{C}_s$ für die Propellerströmung . . . . .	105
6.16	Fourier-Koeffizienten des Schubbeiwertes der Propellerströmung . .	105
6.17	Moden der Geschwindigkeit für den Propeller . . . . .	106
6.18	Rechenzeit für das Zeitschrittverfahren für den Propeller . . . . .	107
6.19	Schubbeiwert des Propellers berechnet mit TSM . . . . .	108
6.20	Residuen für die zeitspektralen Rechnungen für den Propeller . . . .	109
6.21	Berechnungszeit von TSM und Zeitschrittverfahren für den Propeller	110
6.22	Berechnungsgebiet für die Ventilschwingung . . . . .	112
6.23	Verteilung der Seitenverhältnisse im groben Netz . . . . .	114
6.24	Verschiebungsfaktor der Netzknoten für das Ventil . . . . .	115
6.25	Netz um das Ventil . . . . .	115
6.26	Druckverteilung auf dem Ventil . . . . .	116
6.27	Axialkraft auf dem Ventil . . . . .	116
6.28	Netze, $CFL$ -Zahlen und Rechenzeiten für das Ventil . . . . .	117
6.29	Fourier-Koeffizienten der Axialkraft des Ventils . . . . .	118
6.30	Rechenzeit über der Zeit für die Ventilschwingung . . . . .	118
6.31	Axialkraft auf dem Ventil für höhere Seitenverhältnisse . . . . .	119
6.32	Gegenüberstellung der Axialkräfte auf verschiedenen Netzen . . . .	120
6.33	Relative Abweichung von $\hat{K}_a$ für das Ventil . . . . .	121
6.34	Residuen für die zeitspektralen Löser für das Ventil . . . . .	122
6.35	Berechnungszeit von TSM und Zeitschrittverfahren für das Ventil . .	123

---

# Tabellenverzeichnis

4.1	Unterschiede zwischen Druck- und dichte-basierten Verfahren . . . .	46
4.2	Überblick der verwendeten Löser und Vorkonditionierer . . . . .	51
5.1	Berechnungsparameter für die Strömung zwischen zwei Zylindern .	66
5.2	Berechnungsparameter für das oszillierende NACA0012-Profil . . . .	69
5.3	Netzstufen und Zeitschritte für das NACA0012-Profil . . . . .	70
5.4	Verwendeter Speicher zur Lösung der Impulsgleichung . . . . .	87
6.1	Berechnungsparameter für das hoch angeregte NACA0012-Profil . .	90
6.2	Netzstufen und Zeitschritte für das hoch angeregte NACA0012-Profil	91
6.3	Berechnungsparameter für den Propeller in Scherströmung . . . . .	101
6.4	Zeitschritt, Zeitschritte pro Periode und <i>CFL</i> -Zahl für den Propeller .	102
6.5	Berechnungsparameter für die Ventilschwingung . . . . .	113
6.6	Netzstufen für die Ventilschwingung . . . . .	113

---

# Programmverzeichnis

2.1	Iterationsvorschrift instationärer Rechnungen . . . . .	17
4.1	Pseudocode für den ZJ-Löser . . . . .	53
4.2	Pseudocode für den BGS-Löser . . . . .	56
4.3	Pseudocode für den GMRES-DILU- und GMRES-DILU-PETSc-Löser	60